Dipartimento di Matematica e Fisica

# Cogito cum Digito?

**Dalla realtà che si tocca, all'intuizione,
al ragionamento logico-deduttivo.
La matematica nella scuola e nella società.**

# Atti
# Tavola rotonda

17 Aprile 2023

**Giorgio Parisi**
(Nobel per la fisica)

**Antonio Veredice**
(L. Peano
Monterotondo)

**Francesco Manzo**
(L. Giulio Cesare)

**Lucio Russo**
(Univ. Tor Vergata)

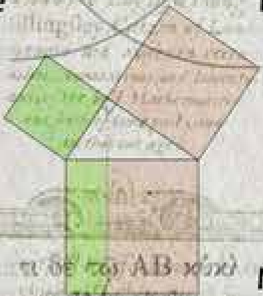
**Franco Ghione**
(Univ. Tor Vergata)

**Daniele Pasquazi**
(L. Touschek
Grottaferrata)

**Monica Ciavatti Bionducci**
(L. Keplero)

**Enrico Arbarello**
(Accademia Lincei)

Modera: **Benedetto Scoppola**
(Presidente Opera Nazionale Montessori)



Edizioni Opera Nazionale Montessori

# Cogito cum Digito?

*"Les mathématiques font partie de la physique.
La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles.
Les mathématiques,
ce sont la partie de la physique
où les expériences ne coûtent pas cher."
(V.I.Arnol'd)*

"A mathematician, like a painter or a poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with *ideas*."
(G.H.Hardy)

Edizioni Opera Nazionale Montessori

**Cogito cum digito?**
Atti della Tavola Rotonda del 17 aprile 2023
A cura di Elisabetta Scoppola
Dipartimento di Matematica e Fisica
Università RomaTre


Via di San Gallicano, 7 - 00153 Roma
Tel. 06584865

www.montessori.it
info@montessori.it

Questo documento è disponibile per il download
sul sito www.montessori.it

Progetto grafico: Bruno Renzi
Stampa: Legatoria BVP - Città di Castello (PG)

ISBN 9788888227542

# *Atti Tavola Rotonda*

Cogito cum digito?

## *Indice*

# *Perché una tavola rotonda sull'insegnamento della matematica a scuola?*

*Elisabetta Scoppola*
Università RomaTre

L'occasione è stata il corso di Probabilità Statistica e Modelli (ME440), per il curriculum didattico della laurea magistrale in Matematica, attivo da tre anni nel nostro ateneo.

Nel tentativo di sottolineare l'importanza dei modelli matematici nella scienza, ho organizzato ogni anno, per gli studenti del corso, una attività aggiuntiva alle lezioni.

Così quest'anno abbiamo organizzato un confronto più ampio, rispetto al solito seminario, che coinvolgesse sia docenti di scuola che accademici a cui sta a cuore la sorte della scuola.

Sono stata aiutata in questa impresa da mio fratello Benedetto Scoppola, presidente dell'Opera Nazionale Montessori, docente nel Dipartimento di Matematica dell'Università di Tor Vergata, da molti anni impegnato nell'insegnamento della matematica nella scuola, e dal collega Andrea Bruno che ha sempre curato l'indirizzo didattico nel nostro Dipartimento.

Siamo stati fortunati e gli inviti che abbiamo fatto sono stati tutti accettati.

Ne è emersa una discussione ampia e particolarmente interessante e appassionata; una scuola viva, piena di ottime iniziative, anche se tra mille difficoltà; la matematica, non solo bellezza assoluta o strumento essenziale della scienza, ma anche palestra per insegnare a ragionare e formare cittadini capaci di scegliere ed essere protagonisti della vita civile.

Al di là dell'occasione specifica, sono convinta che anche se molto si sente e si legge sulla scuola, sia essenziale dare voce a chi la scuola la vive, in un periodo in cui, parlando di insegnamento, vengono messi in campo diversivi di vario tipo.

Colgo l'occasione per ringraziare ancora tutti i partecipanti al dibattito per il loro contributo a questi atti e l'Opera Nazionale Montessori, che si è fatta carico di curarne la pubblicazione.

Ringrazio il Dipartimento di Matematica e Fisica, dal Direttore a tutto il personale che ci ha aiutato nell'organizzazione dell'evento. Ringrazio anche i Dipartimenti di Ingegneria Civile, Informatica e delle Tecnologie Aeronautiche e di Ingegneria Industriale, Elettronica e Meccanica, che ci hanno ospitato, con l'aiuto dei loro tecnici. Ringrazio Bruno Renzi che ha curato la parte grafica, dalla locandina fino alla preparazione di questi atti.

Ringrazio infine i miei studenti che hanno partecipato ed aiutato in questo incontro.

# *Intervento introduttivo*

*Benedetto Scoppola*
Università di Tor Vergata

Benvenuti a tutti.

Grazie ai relatori e alle persone presenti a questa tavola rotonda per la vostra partecipazione, sono molto contento di questa occasione di riflessione. Vorrei iniziare ponendo ai relatori due domande e una breve considerazione personale. Naturalmente i relatori, a cui ho già inviato le domande, sono liberi di sviluppare il loro intervento in modo completamente diverso.

Le domande sono le seguenti:

1) L'Unione Europea negli ultimi decenni ha dato in modo piuttosto deciso due indicazioni alla scuola: la prima è la promozione delle competenze degli allievi, spesso messe in contrapposizione alle conoscenze; la seconda, più recente, è la transizione digitale, in tutti i gradi dell'istruzione.

Soprattutto riguardo a quest'ultima non ci sono ad oggi risultati condivisi che dimostrano la validità di questa scelta. Eppure la transizione digitale della scuola è un treno in corsa, impossibile da fermare. Cosa ne pensate?

2) Quale credete possa e debba essere, nella scuola, il rapporto tra la storia del pensiero scientifico e il suo insegnamento/apprendimento? Per esempio nelle sue opere storiche Lucio Russo ha coniato il concetto di *scienza fossile*, cioè di teoria completamente staccata

dalla fenomenologia che l'ha prodotta. Quanto pensate che sia fossile la scienza che si impara nelle nostre scuole? Una adeguata presentazione storica dei problemi potrebbe aiutare?

Infine la mia considerazione:
Supponiamo che si arrivi a dimostrare (non siamo tanto lontani) che la scienza si deve imparare a partire da esperimenti concreti realizzati in classe con le mani, ma soprattutto che la conoscenza ottenuta attraverso la manipolazione è molto più efficace e duratura, ma ha tempi molto lunghi. Si osserva infatti che occorre parecchio, a volte molti mesi, perché il cervello elabori completamente le informazioni che ha acquisito attraverso le esperienze concrete legate al movimento e alla manipolazione. Lasciatemi chiamare questo fenomeno *Effetto Petriccione*, dal nome di una bravissima e giovane maestra scomparsa recentemente che, per quanto ne so, lo ha per prima individuato nella sua tesi di laurea.

Come potrebbe rispondere la scuola a questi risultati? Certamente dovremmo immaginare dei percorsi molto diversi da quello classico che prevede per ciascun argomento la successione presentazione-esercizi-verifica.

Grazie a tutti.

# *Intervento Giorgio Parisi*
*Nobel per la Fisica*

Per riflettere bene sulla didattica scolastica conviene farci alcune domande preliminari, che ci permettono di inquadrate correttamente il problema.

- Con quale finalità i ragazzi devono andare a scuola?
- Cosa devono imparare?

Non possiamo certo partire dall'idea che la scuola debba preparare ad una istruzione superiore, quella universitaria, dato che solo una parte degli studenti andrà all'università.

Perché dunque si va a scuola? Io penso che la funzione primaria della scuola sia preparare dei cittadini che possano prendere decisioni consapevoli, che siano in grado di poter scegliere. Per dare loro questa capacità di scegliere è essenziale che ci sia anche una consistente formazione scientifica.

La nostra società, infatti, progredisce in modo tale per cui l'influenza della tecnica e della tecnologia sulla vita di tutti i giorni diventa sempre più importante; questo fatto ha profonde implicazioni nelle scelte politiche e sociali. Pensiamo per esempio al caso del COVID, alle scelte relative ai cambiamenti climatici, o alle discussioni molto dettagliate per quanto riguarda l'esaurimento più o meno veloce delle risorse fossili. È chiaro che per una cittadinanza consapevole è fondamentale la capacità di poter comprendere le informazioni che riguardano questi argomenti e che spesso sono disponibili in forma di numeri. Le statistiche vanno al di là della retorica che a volte accompagna le posizioni pubbliche, tuttavia non è facile leggerle correttamente.

Bisogna dunque chiarire il tipo di formazione scientifica che la scuola deve fornire. Scegliere tra competenza e conoscenza è molto complicato. È chiaro, però, che è difficile che si possa ottenere una competenza senza una conoscenza. Ad esempio, saper fare una moltiplicazione è una competenza, ma è necessario avere una conoscenza delle regole della moltiplicazione.

Paradossalmente la competenza che è davvero la più difficile consiste nel capire quando è necessario fare una moltiplicazione o una divisione. Facciamo un esempio concreto; recentemente è stato scritto su un giornale che l'Unione Europea ha importato 100 miliardi di tonnellate di grano: ci rendiamo subito conto che c'è qualcosa che non torna, facendo semplicemente una divisione tra tonnellate di grano e numero di abitanti dell'Unione europea. Questo episodio illustra anche che a volte i numeri vengono utilizzati nei giornali in maniera retorica, senza nessuna cura, con l'idea che un milione e un miliardo sono più o meno la stessa cosa, vogliono indicare entrambi un numero molto grande.

Parliamo ora del digitale a scuola. Il digitale dovrebbe essere un mezzo e non un fine, un po' come la penna. Quando ho cominciato la scuola avevo la penna a inchiostro e il calamaio, arrivato alla seconda o terza elementare mi hanno dato la penna stilografica e senza dubbio è stato un grande progresso, come lo è stato alle medie poter utilizzare la penna biro che non ho potuto usare prima perché dicevano potesse portare, se usata troppo presto, a una brutta calligrafia. Chiaramente le tecnologie stanno progredendo molto rapidamente, ma vorrei citare in primo luogo Umberto Eco, che diceva che la cosa più importante in questo mondo digitale è il saper selezionare le varie informazioni che ci arrivano. È fondamentale fare in modo che le persone capiscano se la fonte delle informazioni che hanno trovato è ragionevole oppure no: la competenza di distinguere la validità delle fonti è fondamentale. Per esempio sappiamo tutti che scrivere i testi in Word è molto comodo, è più semplice che scrivere a mano, ma nella scrittura digitale ci sono dei vantaggi e degli svantaggi come in tutte le cose. Infine non dobbiamo dimenticare che le varie tecniche digitali diventano rapidamente obsolete. Se avessimo insegnato il digitale cinquant'anni fa avremmo insegnato a programmare in Basic o in Fortran, mentre il digitale di oggi è molto diverso e anche i linguaggi usati sono profondamente diversi.

Veniamo ora al discorso che faceva Benedetto sull'importanza di utilizzare le mani: la manipolazione è fondamentale per imparare. Benedetto lo sa benissimo anche in virtù dell'insegnamento di Maria Montessori: il bambino impara toccando, giocando, muovendo le mani. È la stessa idea di fondo di un programma di insegnamento francese, "Le mani in pasta", nel quale i ragazzi imparano proprio toccando con le mani. In Spagna mi parlavano molto bene di aste numeriche simili a quelle Montessori, ma lievemente modificate: ogni numero corrisponde a una lunghezza di cinque centimetri e su ogni asta è scritto il numero che l'asta rappresenta, in modo che si veda chiaramente che mettendo un'asta di 3 vicino a un'asta di 5 si ottiene un'asta con il numero 8.

L'apprendimento della matematica attraverso la manipolazione di oggetti è molto ragionevole. Ho imparato da un grande neuroscienziato, Lamberto Maffei, che su questo ha scritto dei libri molto interessanti, che esistono due tipi di memoria: un tipo di memoria, alla quale siamo più abituati, è la memoria semantica, che corrisponde al ricordarsi le cose attraverso le parole che le descrivono; l'altra memoria, molto più resistente, è la memoria procedurale. Quest'ultima consiste nell'imparare a fare le cose, per esempio è quella che ci fa ricordare come si va in bicicletta. È ben noto, anche nella cultura popolare, che una persona che ha imparato ad andare in bicicletta difficilmente si dimentica come si fa, mentre si scorda molto facilmente in che anno è morto Giulio Cesare o quanti raggi ha una ruota di bicicletta. La memoria procedurale è molto più stabile e molto più duratura della memoria di tipo semantico.

Sappiamo che la scienza si sviluppa per tanti motivi, direi soprattutto per la curiosità di chi la fa, e non tutta la scienza è ispirata dalle esigenze della società. Tuttavia, rimane molto importante il rapporto tra gli studi scientifici e le necessità della società. A scuola, quando viene presentata la storia della scienza non bisogna limitarsi a presentare solo gli sviluppi tecnici, ma anche un quadro generale della società dell'epoca. Unendo questi due aspetti dovrebbe risultare chiaro che la scienza non nasce solo in astratto, ma anche dalle esigenze della società. È importante insegnare a scuola anche la storia della scienza perché il suo studio dovrebbe contribuire a far sì che le persone si fidino della scienza. Sappiamo che questa fiducia non può venire solo dagli scienziati che tentano di convincere le persone automagnificandosi. È necessario convincere le persone presentando i contenuti delle teorie scientifiche, anche attraverso il loro sviluppo storico, evidenziando come gli scienziati in generale siano delle persone in buona fede che cercano di ottenere dei dati oggettivi, di arrivare ad una conoscenza che si avvicini il più possibile alla realtà con una precisione controllata. Senz'altro la scienza è un processo che va per tentativi ed errori, ma è fondamentale capire come procede e come e quando si siano avute le rivoluzioni scientifiche.

Il modo di procedere della scienza, il capire il metodo con cui si arriva ad ottenere un consenso scientifico, consenso che è un qualcosa di estremamente più solido dei risultati di un singolo esperimento. Tante volte, infatti, capita di leggere sui giornali che un certo risultato è scritto su di una rivista scientifica e quindi non è discutibile; in realtà una singola pubblicazione scientifica non determina necessariamente la correttezza del risultato. La comunità scientifica raggiunge il consenso sull'affidabilità di un risultato attraverso un processo complesso, "provando e riprovando". È necessario comprendere come si raggiunga questo consenso analizzando esempi concreti ed evidenziando eventuali difficoltà ed errori. A questo scopo ritengo che sia fondamentale a scuola presentare la scienza anche insieme alla storia e alle altre attività umane.

# La condivisione delle buone pratiche

*Monica Ciavatti Bionducci*
Liceo Keplero (Roma)

Riflessione sull'insegnamento della matematica e della scienza, che ad un certo punto del percorso didattico spesso non piacciono e non si capiscono più, nonostante il digitale.

## *Il sogno della scuola italiana*

La nostra scuola persegue un ideale di equità e di pari opportunità: valori molto elevati e coraggiosi che non tanti Paesi assumono, che più di una Nazione ci invidia e tuttavia di difficile realizzazione. Fare scuola a chi parte già in vantaggio è semplice, esplicitare le attitudini latenti di chi non sa nemmeno di averle e non ha nessuno con cui condividerle è tutt'altra faccenda. Se vogliamo che questo ideale si concretizzi, la didattica deve essere eccellente. Questo è vero soprattutto per la matematica e, in generale, per le scienze.

La matematica è un costrutto meraviglioso che solo una piccola parte delle persone è capace di apprezzare nella sua intrinseca, profonda bellezza. La maggior parte della gente, anche chi ha studiato discipline scientifiche, la usa per quello che serve. In una scuola generalista, in particolare, questa regina della mente ha un ruolo ancillare ma fondamentale per acquisire consapevolezza, capacità di decidere di noi stessi e degli altri e appropriarsi di una competenza scientifica (almeno) di base.

Il concetto di modello per la descrizione della realtà è una delle competenze di cittadinanza più elevate che possiamo lasciare ai nostri allievi assieme al livello di confidenza di un dato che deriva dalla consapevolezza dell'errore. Aiutare a *sognare* e a *dubitare*. Cos'altro potremmo fare di più e di meglio?

Come nota Giorgio Parisi,

*"Si ha l'impressione che aumentando il flusso di dati non aumenti la conoscenza, ma solo la confusione. Sembra quasi un paradosso, ma non lo è: è la prova che è solo un'illusione pensare che i dati siano trasparenti, che la loro conoscenza ci permetta di costruire la realtà senza mediazioni.*
*Non è così: qualcuno diceva, parafrasando Eraclito, che i dati sono come il Dio il cui seggio risiede a Delfi: non nascondono e non dicono, ma indicano. I dati hanno bisogno di essere interpretati, utilizzando un quadro concettuale opportuno che si basa su due pilastri: la matematica e la probabilità*. *Due grandi sconosciute, almeno nel nostro Paese."*[1]

## ***Il privilegio di condividere***

Nella mia carriera di docente ho goduto del privilegio di poter condividere, discutere, sperimentare a lungo con altre persone a cui sta a cuore fare bene il proprio lavoro di docente e di disseminatore. Come formatore per l'insegnamento della matematica e della

[1] G. Parisi – *La Stampa*, 21 dicembre 2022.

fisica infatti, per molti anni ho raccolto le istanze e i suggerimenti degli insegnanti dei tre ordini di scuola e dell'Università[2].

Con il passare del tempo, mi è risultato sempre più chiaro che il cuore della buona didattica risiede proprio nella condivisione di esperienze. I docenti della scuola media e delle scuole superiori sono forse l'unica categoria di lavoratori che, a fronte di un lavoro di elevata responsabilità sociale e personale nella formazione dei cittadini, non ha sufficienti spazi istituzionali riconosciuti come *necessari* e *inderogabili* per la condivisione e il confronto *continuo* sulle modalità e gli esiti del proprio lavoro. Parliamone e facciamo un po' di storia, per coloro che non sono proprio addetti ai lavori. Anche se in seguito mi riferirò in particolare alle mie discipline, mi sento di affermare che la situazione che descriverò è sostanzialmente condivisa con gli altri insegnamenti.

Fino alla fine del secolo scorso, gli insegnanti sono entrati in classe con un elevato bagaglio disciplinare e una competenza didattica praticamente nulla. L'anno di formazione, detto "di ruolo straordinario", metteva insieme qualche ora di seminari in cui nessuno credeva veramente, nemmeno i relatori, concluso da qualche minuto di burocrazia. Le poche ore di formazione percorrevano un modello noto: la lezione frontale.

[2] Mi sono occupata di formazione per l'insegnamento delle scienze sperimentali, delle abilitazioni dei nuovi docenti come tutor coordinatore e docente nei TFA e PAS, del Piano Lauree Scientifiche e delle Lauree Magistrali in Matematica ad indirizzo didattico presso l'Università di Roma Tre, formandomi e formando a mia volta nuovi docenti.

Discussioni, contraddittorio, scambio di opinioni: inesistenti. Cosa potevano dire i nuovi docenti? Appunto, erano nuovi…

Nel frattempo i docenti stavano comunque in classe e, nella maggior parte dei casi, somministravano lezioni frontali. La lavagna e la cattedra come porto sicuro, il salvagente durante il naufragio. Credo che gli psicologi la definirebbero *coazione a ripetere*.

Pochi sapevano qualcosa di tecniche didattiche, nodi cognitivi tipici, uso del linguaggio verbale e non verbale, forme di lezione partecipata, uso del laboratorio nella didattica della fisica e della matematica, scansione efficace degli argomenti, tipologie di verifiche e le mille altre cose che un insegnante esperto tiene in considerazione. Ebbene, in qualunque ambiente lavorativo in cui ci si preoccupa dell'efficienza del sistema, ci sarebbe un periodo di affiancamento con personale esperto, riunioni frequenti per confrontarsi e verificare lo stato di avanzamento dei lavori, e altre simili forme per la progressione e la formazione dei nuovi assunti, nell'interesse di tutti. Nella scuola no. Ogni insegnante per sé, ad imparare sulla pelle dei ragazzi cosa è meglio fare. Una eredità scomoda della "scuola per pochi" e impropria progenie dell'art. 33 della Costituzione relativo alla libertà dell'insegnamento.

La formazione dei nuovi docenti è cambiata con la SSIS[3], il cui impianto è stato in qualche modo

[3] La SSIS – Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario – è stata attivata nel 1999 con la finalità di formare gli insegnanti delle scuole secondarie di primo e secondo grado, con accesso a numero chiuso. Alla conclusione della SSIS (di durata biennale, con

mantenuto con i TFA[4]. Con questi percorsi, l'insegnamento della matematica e della fisica ha fatto un salto di qualità: le metodologie didattiche, la riflessione su cosa e come valutare e l'attenzione verso la diversità sono diventati argomenti accessibili e veramente condivisi. Importantissimo in questi percorsi abilitanti, il tirocinio formativo nelle classi. Poter osservare l'insegnamento altrui, confrontando stili e metodologie, è un arricchimento che può evitare lunghi periodi di miglioramento personale portato avanti per tentativi ed errori. "Qual è stata la parte più importante della tua formazione come futuro docente?". Questa la domanda che ho sempre posto, e la risposta è sempre stata la stessa: il tirocinio nelle classi, il confronto con gli altri insegnanti.

Nel frattempo, nei metodi didattici di tutte le discipline ha cominciato ad apparire l'espressione "uso della LIM.", come se usare la lavagna interattiva multimediale fosse un *metodo* e non uno *strumento*, di

---

qualche eccezione), era consentito accedere direttamente all'insegnamento e, pur restando nel precariato, si entrava a far parte del mondo della scuola. A conclusione del suo IX Ciclo la SSIS è stata chiusa nel 2009.

[4] A partire dal 2011 e per pochi anni per quanto riguarda matematica e fisica, la SSIS è stata sostituita dal TFA (Tirocinio Formativo Attivo), percorso a numero chiuso con accesso per concorso per esami e titoli, alla conclusione del quale gli aspiranti insegnanti sostenevano un esame per all'abilitazione all'insegnamento. La durata era (formalmente) annuale, ma di fatto le attività venivano fatte partire talmente in ritardo che la durata vera era di circa 5 mesi. Poi sono arrivati altri percorsi abilitanti, dalla vita ancora più breve.

per sé garanzia di successo. Dal 2006[5] ad oggi l'uso delle tecnologie è cresciuto esponenzialmente e l'uso del *digito* è quello che conosciamo.

Purtroppo i percorsi di formazione hanno subìto una triste interruzione: dopo il 2016, niente più TFA e PAS per l'insegnamento di matematica e fisica e, a tutt'oggi, niente lauree abilitanti[6]. Molti dei docenti che arrivano dagli ultimi concorsi non hanno alcuna formazione specifica nella didattica, a volte non sono mai entrati in una classe. In compenso l'anno di prova è più articolato[7], ma rimane comunque la spiacevole sensazione di un salto temporale all'indietro di vent'anni.

I docenti di matematica e fisica, nel frattempo, hanno cambiato gradatamente profilo: dopo l'egemonia dei laureati in matematica, hanno cominciato ad apparire i laureati in fisica, i dottori di ricerca, i profili provenienti dalle professioni informatiche. Assieme al *cogito* si è fatto strada, timidamente dapprima, poi in modo sempre più dilagante, il *digitus.*

Ma torniamo all'argomento principale di questa riflessione. Tutto questo *digito* è necessario, ma

---

[5] La LIM è stata ufficialmente introdotta nella scuola con Circolare M.I.U.R. 11 settembre 2006.

[6] Qualche percorso virtuoso però esiste, come il curriculum per la Laurea Magistrale in Didattica e Comunicazione Scientifica del Dipartimento di Matematica e Fisica – Laurea in matematica – dell'Università di Roma Tre, in cui sono previsti corsi specifici per la didattica della matematica, fisica e scienze e 150 ore di tirocinio nelle scuole medie e superiori.

[7] D.M. 27 ottobre 2015 n. 850 e segg.

soprattutto è sufficiente per un insegnamento di qualità?

### *La responsabilità dello scopo*

Così come nell'educazione dei figli non funziona più da tempo "devi fare questo perché te lo dico io", anche nella formazione degli allievi l'istruzione fine a se stessa ha poca presa. Mi spiego meglio: mentre i ragazzi possono trovare ancora una qualche ragione nello studio della grammatica italiana, così come della lingua inglese o della storia, difficilmente trovano una spinta emotiva profonda nello studio della divisione fra polinomi, nella ricerca della tangente ad una circonferenza o nello studio della legge oraria del moto rettilineo uniforme. Ancora una volta, ricordiamoci che non dobbiamo pensare a coloro che sono già animati da una passione per il numero, si emozionano per la costruzione logica di un teorema o che colgono la profonda necessità dei modelli, ma degli altri. Non solo degli studenti con competenze insufficienti[8] ma anche di quelli che ci seguono solo con gli occhi e non con il cuore.

Non si tratta di fare azioni pubblicitarie su quello che insegniamo, ma credo che spetti a noi la responsabilità di dare al nostro insegnamento una giusta "profondità di campo", di spiegare ai nostri allievi da dove proviene la necessità di un concetto, di raccontare una storia. Così, ecco che le funzioni logaritmiche ed esponenziali narrano di navi e mercanti, batteri e radioattività, l'oscillatore armonico

---

[8] Il 25%, secondo le ultime statistiche OCSE-PISA.

racconta la trasmissione di calore e la musica del mondo, così come la forza di Lorentz parla di trasformazioni in cui spazio e tempo si fondono e, se proprio non ci viene in mente altro, la regola di Ruffini sarà un piccone con cui sbricioleremo un integrale. Non sapete che cosa è un integrale? Lo capiamo con un disegno, forbici, un pezzo di cartoncino e una bilancia.

Le chiavi di volta dell'insegnamento sono il coinvolgimento e l'emozione, non c'è bisogno di mettere tanti riferimenti a piè di pagina (ce ne sarebbero molti) per supportare questa affermazione. Noi insegniamo a ragazzi che restano, in genere, fino a 19 anni nel sistema scolastico e che eserciteranno le professioni e i mestieri più disparati. A volte ci comportiamo come se tutti loro debbano o possano laurearsi in fisica o matematica. Quando non capiscono le nostre discipline gliele ripetiamo fino allo sfinimento, in una sorta di accanimento terapeutico. Affinché sia gli studenti che i loro docenti possano essere un po' più felici è bene cercare di coinvolgere i ragazzi, emozionarli e, soprattutto, dare loro dei buoni motivi per credere nella scienza[9] e nei suoi metodi.

In tutto questo, la tecnologia ha un ruolo importantissimo. Per fare un solo esempio di quello che possiamo utilizzare nel nostro insegnamento, un cellulare è diventato un tutor risolvitore di esercizi, un laboratorio portatile di cui si usano tutti i sensori, un luogo dove seguire una lezione, uno spazio di

---

[9] "[È necessaria una] comunicazione istituzionale e scientifica chiara e ben organizzata, per ridurre il rischio di infodemia e risposte comportamentali impreviste" - M. De Domenico - *Il Sole 24 Ore,* 6 marzo 2022.

condivisione. Le biblioteche sono virtuali, un approfondimento si mette a punto su YouTube, si studia con gli amici che abitano lontano condividendo uno schermo, si usa la realtà virtuale per capire come funziona una reazione chimica pericolosa o per vedere in 3D il meccanismo di funzionamento di un rivelatore di particelle del CERN. Evviva, tutto questo è bellissimo.

## *La comunicazione efficace*

*"Au milieu du XX$^{e}$ siècle on a essayé de séparer les mathématiques de la physique. Les résultats ont été catastrophiques! "* Penso che questa frase di Arnold possa essere resa ancora più universale: non solo sarebbe bene non separare la matematica dalla fisica, ma nemmeno dalla biologia, dalla chimica, dalla linguistica, dalla medicina, dall'economia e dalla *vita*, in generale. La matematica ha mille modi per coinvolgere ed emozionare. Molti docenti lo sanno, ma ancora non tutti, non abbastanza. Credo che se la disseminazione dei saperi all'interno della comunità docente avvenisse in maniera sistematica e capillare, l'insegnamento potrebbe cambiare su larga scala in un tempo ragionevole ed essere veramente efficace.

Un grande supporto all'insegnamento della matematica e delle scienze viene dal poter capire tramite il *fare*. Fare con tutte le mani, non solo con i pollici. Costruire, trovare una corrispondenza fra la teoria e il mondo reale. Abbiamo una scelta enorme di buone pratiche sperimentali per tutte le discipline scientifiche, e non vale parlare di laboratorio poco attrezzato o inesistente, il laboratorio povero è una filosofia di lavoro e una metodologia accessibile su cui c'è tanta letteratura[10]. Allora qual è il problema?

## *Il collo di bottiglia*

Sui grandi principi siamo, in genere, tutti d'accordo. Vorrei parlare di qualche aspetto pratico dell'insegnamento delle discipline scientifiche meno evidente ma non per questo meno importante.

Anzitutto, un docente che voglia rinforzare il proprio lavoro con pratiche sperimentali ha bisogno di supporto. Intendo dire che ha bisogno di almeno un altro paio di mani volenterose, competenti e attente per lavorare con gli studenti, per preparare un tavolo o lavare la vetreria alla fine di una attività, per riavvitare un apparato traballante o saldare un filo staccato.

Sappiamo che i docenti sono tutti, indistintamente, dotati della capacità di smaterializzarsi in una classe alla fine di una lezione e rimaterializzarsi nell'aula di un'altra classe in un intervallo di tempo pari a zero, altrimenti non si spiegherebbero le scansioni orarie delle lezioni in tutte le scuole. Sappiamo anche che i docenti non hanno alcuna necessità materiale perché, durante gli intervalli degli studenti, sono deputati a controllare gli studenti stessi. Ma la capacità di preparare una attività pratica per 25 persone senza alcun aiuto né prima, né durante né dopo è prerogativa di pochissimi eletti, temprati da anni di difficoltà e da una consolidata abilità come scienziato sperimentale,

---

[10] Per le buone pratiche di laboratorio, povero e non, consultare per esempio https://ls-osa.uniroma3.it/

magari acquisita fuori dall'insegnamento. E anche quelli, prima o poi, si stancano.

Quello che sto per dire nel seguito non risulterà molto gradevole, ci tengo a dire che la situazione che descrivo non è generale, ma sicuramente diffusa.

Dal decreto che definisce i titoli richiesti per un tecnico di laboratorio e le sue mansioni[11], si evince che quasi qualunque diploma di scuola superiore consente di accedere a tale posizione e non è prevista alcuna verifica delle competenze pregresse. Anzi, è possibile la transizione diretta da assistente amministrativo a tecnico di laboratorio.

Il risultato è che, a fronte di docenti a cui si richiedono lauree, concorsi, abilitazioni e competenze elevate in tutti i settori dell'insegnamento, le scuole si dotano di personale tecnico di laboratorio di qualità

[11] Il lavoro dell'assistente tecnico è orientato alla didattica, in quanto deve coadiuvare i docenti e gli studenti nelle loro attività scolastiche quotidiane. I compiti dell'assistente tecnico sono: preparazione e allestimento dei laboratori, gestione degli stessi in compresenza con l'insegnante; manutenzione delle apparecchiature e reperimento materiale; rapporti con l'ufficio tecnico e attività di coordinamento. La preparazione dell'assistente tecnico prevede il possesso di competenze tecniche, e una continua formazione e aggiornamento. Gli orari di lavoro sono di 36 ore settimanali, delle quali massimo 24 in compresenza con un docente; le restanti vengono impiegate per la manutenzione delle strumentazioni. Per diventare assistente tecnico è necessario un diploma di maturità compatibile con una o più aree di laboratorio: per verificare a quali aree si può accedere è possibile consultare la Tabella di Corrispondenza Titoli di Studio-Laboratori allegata al DM 717 del 5/9/2014.

non controllabile, la cui formazione sul campo è affidata alla personale concezione della dignità lavorativa.

Inoltre, ogni docente che prende servizio in una scuola, indipendentemente dalla formazione ricevuta, non sa dove mettere le mani in un laboratorio che non conosce, quindi non lo userà se non viene supportato adeguatamente. I colleghi di materia, d'altra parte, hanno già il loro bel da fare a smaterializzarsi e rimaterializzarsi qua e là, e ritorniamo al problema dell'affiancamento in servizio.

Questo sistema crea un danno grave all'insegnamento scientifico perché ogni pratica di laboratorio viene scoraggiata dalla solitudine che i docenti sperimentano.

## *Conclusioni e proposte*

Ci sono, a mio avviso, alcune cose che potrebbero essere messe in pratica con una buona organizzazione a costo quasi nullo ed altre che avrebbero bisogno di un capitolo di spesa, ma nemmeno troppo ampio.

In primo luogo, le competenze dei docenti, digitali o di qualunque altro tipo, dovrebbero poter essere condivise in modo snello e continuativo. Abbiamo bisogno di supporto reciproco perché c'è un bagaglio di saperi che viene disperso e dimenticato ad ogni trasferimento da una scuola ad un'altra e ad ogni pensionamento.

Alle cattedre a 18 ore si potrebbero preferire cattedre con 2 o 3 ore di potenziamento da dedicare a lezioni in copresenza o a classi aperte, agendo per fasce di apprendimento. Sarebbe determinante che una di queste ore (ogni settimana) fosse libera per tutti i docenti di uno stesso gruppo di lavoro per potersi confrontare, discutere e organizzare tempi e modi della didattica della settimana successiva, pianificando attività di laboratorio ed altro, lasciando traccia delle proprie attività. Per fare questo, basterebbe un dirigente illuminato, un nucleo iniziale di docenti interessati, un numero adeguato di ore di potenziamento e una commissione orario collaborativa.

Chissà se questo metodo, portato a regime, potrebbe salvare tempo e fatica di docenti e studenti nonché soldi dei contribuenti, sostituendosi ai corsi di recupero fatti dopo sei ore di lezione ordinaria, con la soglia dell'attenzione degli studenti decaduta, ovviamente, sotto il minimo accettabile.

Contemporaneamente, sarebbe bello poter contare su personale tecnico preparato e motivato. Per un lavoro di supporto così importante ci dovrebbero essere dei test di accesso al ruolo e una formazione tenuta da persone qualificate, per esempio da tecnici esperti o dagli stessi docenti della scuola, che avrebbero tutto l'interesse a preparare personale adeguato.

In sintesi, abbiamo bisogno di essere supportati dai dirigenti scolastici e dalla politica con qualcosa di più concreto della possibilità di acquistare una collezione di attrezzature e dispositivi costosi che nessuno poi ha il tempo, il modo e la capacità di usare.

Di una cosa, invece, non abbiamo proprio necessità: di tanto in tanto qualche personaggio in vista dichiara pubblicamente di non aver mai capito nulla di matematica e, ciò nonostante, di essere arrivato ad essere quello che è. Ebbene, ci sono anche persone che non sanno usare congiuntivi e condizionali e sono in posizioni di prestigio. Questo non fa onore né agli uni né agli altri, ma i secondi, in genere, non lo raccontano a tutti.

# *Emma Castelnuovo e la gioia della matematica*

*Enrico Arbarello*
Accademia dei Lincei

Mi è capitato di riflettere sull'insegnamento della matematica nelle scuole medie italiane, circa 15 anni fa, quando, insieme a Maurizio Cornalba partecipammo ai lavori di una commissione, che di questo si occupava, e che fu istituita dall'allora ministro Fioroni. Partecipammo a quei lavori per soli sei mesi ma lavorammo sodo. Leggemmo molti dei libri di testo di matematica che circolavano all'epoca. Quasi tutti piuttosto brutti, alcuni pessimi, pieni di esercizi ripetitivi e punitivi.

Confezionati seguendo un'estetica da comunicato commerciale. La Matematica vi appare come una zona del pensiero immutata nel tempo e immutabile, priva di storia, e dunque di personaggi, nulla di più distante da bambini e bambine che stanno crescendo e che mutano di mese in mese e che anche per questo amano, come tutti amiamo, le storie. Dunque nulla di più incomprensibile ed estraneo. Protagonisti di questi testi sono le definizioni e i procedimenti logico-deduttivi, dunque la parte meno rilevante della matematica.

Cito Guido Castelnuovo (1907)

*Eppure la scuola non è veramente efficace se essa non si dirige alle intelligenze medie, se non riesce a* *formare quella democrazia colta, che è pur la base di ogni Nazione moderna... È ben spesso preferibile ricorrere ad un ragionamento approssimato i cui passi successivi vengono sottoposti al riscontro dei fatti, per sceverare via via il vero dal falso, piuttosto che affidarsi ad una logica impeccabile, chiudendo gli occhi al mondo esterno.* E Castelnuovo continua così: *Ora la matematica come oggi si insegna nelle scuole disprezza a torto quel primo tipo di procedimento,* (cioè quello intuitivo) *e condanna in tal modo l'unica forma di ragionamento che sia concessa alla maggioranza degli uomini... Col dimostrare logicamente ciò che è evidente all'intuizione, si porta un doppio danno, perché si scredita insieme il ragionamento, di cui non è quello l'ufficio, e l'intuizione, di cui si disconosce l'immenso valore.*

Ma qui a parlare non c'è solo Guido Castelnuovo, ci sono anche la sua nonna Adele Levi della Vida, educatrice veneziana, prima in Italia a introdurre i metodi di Froebel, e soprattutto c'è la propria figlia Emma!

Ricordo Emma perfettamente: al Tasso nei primi di Ottobre del 1956, all'inizio della mia prima media.
Quelle poche ore di matematica alla settimana sono indimenticabili.

Emma entrava in aula di corsa e parlava a noi prima di arrivare alla cattedra come se continuasse dalla volta scorsa. Era inarrestabile, incuteva soggezione tramite la continua attenuazione dei toni e l'ironia.

Stabilito questo rapporto incominciavamo a viaggiare con lei, a intuire insieme a lei, a meravigliarci insieme, a ripercorrere, ora il processo creativo, ora quello analogico, e ora quello di modellizzazione, tutti parte del pensiero matematico. Non seguivamo mai un percorso assiomatico o logico deduttivo, necessari ai matematici di professione solo nella fase finale delle loro ricerche. E anche l'educazione, la buona educazione alla logica, non passava per ragionamenti di tipo deduttivo ma sempre attraverso l'esercizio costante della ricerca dei controesempi.

Le sue lezioni le ricordo piene di storia, di pittura, di architettura, di mezzi di trasporto, di orari ferroviari, di posta, di energia elettrica, di telefono, sport, agricoltura, di giardini, di astronomia... ed erano piene di popoli, il Nord Africa, l'Asia minore, l'India, la Grecia, la Sicilia, la Toscana e l'Oltrepò Pavese.

Emma riusciva a riprovare insieme a noi l'emozione e la gioia delle scoperte matematiche.

Ma cos'è questa gioia? L'emozione generalmente nasce da un'idea vaga, da un barlume lontano in cui si intravede, per esempio, che due concetti apparentemente slegati e tra loro distanti presentano invece inaspettate analogie, che sotto una analisi sempre più profonda prendono una forma del tutto sorprendente, unificate da un quadro molto più generale... In quel momento uno capisce, da cui la gioia, anche se momentanea. Ed Emma stava molto attenta a che tutti potessero arrivare insieme alla comprensione. Per chi arrivava prima, fingeva di provare un qualche lieve fastidio.

Con Emma i due pilastri del pensiero matematico, l'intuizione e l'astrazione, erano sempre presenti e sempre si partiva dalla realtà, dal fatto, per esempio, che noi sappiamo bene cos'è un cerchio ma che un cerchio non lo vediamo mai, i cerchi li vediamo quasi sempre appiattiti, vediamo solo delle ellissi e viceversa un cerchio può essere l'ombra di una ellisse, e l'iperbole l'ombra di un cerchio. Senza mai nominare, ellissi, iperbole e parabole, Emma, guidata da Piero della Francesca e da Dührer, ci faceva scoprire con l'intuizione la geometria proiettiva, e poi stimolando in noi l'esigenza dell'astrazione ci faceva mettere ordine su queste strane analogie. Solo allora venivano i nomi: così, solo per intenderci. E tutto ciò lo facevamo noi, ed era una gioia, e lo facevamo spesso con le mani, costruendo di continuo dei modelli.

Da quelle lezioni sono nati due capolavori dell'insegnamento della matematica.

*La Geometria* e *I Numeri* che Emma Castelnuovo scrisse e rielaborò a più riprese nel corso di molti anni. Questi volumi sono, io credo, tra i più importanti contributi all'insegnamento scolastico della matematica del secolo scorso. E forse non abbiamo ancora compreso a pieno di quale tesoro sia detentrice la cultura italiana.

Basterebbe aggiornare un po' questi due libri per avere due testi che si adatterebbero perfettamente alle esigenze attuali. Basterebbe sviluppare un po' di più il calcolo probabilistico, introdurre i numeri complessi, e far fare agli allievi e alle allieve ciò che già sanno fare: i grafici e i calcoli con il computer. Questo fu il parere che Cornalba ed io offrimmo alla commissione ministeriale e che fu scarsamente ascoltato.

Per tutto ciò è importante ristabilire un contatto tra insegnanti delle scuole medie e dei licei e matematici di professione. Un contatto che si è andato via via perdendo. In effetti, per rispondere alla esigenza di stabilire un rapporto più stretto tra gli insegnanti delle scuole e il mondo dell'Università, si è formato nel tempo un vasto settore universitario dedicato alla didattica della matematica. Questo settore, con il passar degli anni, si è un po' rinchiuso in se stesso venendo meno a quelli erano gli scopi iniziali della sua formazione. Ciò va corretto.

Due considerazioni finali.

All'epoca di Guido Castelnuovo vi era rispetto per gli insegnanti delle scuole medie e dei licei. Il rispetto si traduceva in livello economico e viceversa. Il contratto tra la scuola e la famiglia si basava su una netta separazione di poteri educativi. Questo contratto educativo, sociale ed economico si è rotto e va ristabilito.

La matematica, come è noto ha un ruolo di livellatore sociale. Con questo intendo che il rendimento in matematica è in certa misura indipendente dal proprio ambiente di origine culturale o linguistico e dal livello sociale della propria famiglia. Condorcet, da buon rivoluzionario, lo aveva capito, e gli esami di matematica nelle scuole Francesi sono tra i più importanti, nel decidere del futuro degli studenti e delle studentesse.

Vi è infine una questione femminile. Parto da un dato di fatto. Le professoresse ordinarie nel campo scientifico, in Italia, costituiscono il 25% del corpo degli ordinari in campo scientifico e nel campo matematico la percentuale scende al 20%. Ora non è compito dell'insegnamento medio, quello di porre riparo a questo scompenso, e a questo spreco di risorse intellettuali. Eppure il problema c'è e riguarda la formazione culturale delle bambine e delle ragazze nelle Scuole Medie e nei Licei.

Penso che le origini di questo scompenso educativo vada ricercato nelle famiglie. È compito della scuola tener presente che il problema esiste.

Ho alcune idee in proposito ma prima di parlarne vorrei avere il parere e conoscere le esperienze di chi insegna a queste bambine e a queste ragazze nelle Scuole Medie e nei Licei italiani.

# *La Matematica come linguaggio*

*Francesco Manzo*
Liceo Giulio Cesare (Roma)

Prima di discutere le strategie didattiche e gli argomenti da trattare, è importante iniziare definendo gli obiettivi dell'insegnamento della matematica (e della fisica) nella scuola nelle sue varie declinazioni.

La matematica svolge un ruolo fondamentale nello sviluppo delle capacità di ragionamento, ma questo si può dire di molte altre attività. Quello che rende la matematica speciale è il suo ruolo di linguaggio per descrivere la realtà, utilizzato nelle scienze fisiche, nell'economia, nella statistica e in molte altre discipline. È proprio in questa funzione di linguaggio che la matematica assume un'importanza cruciale nella società. Tuttavia, spesso vediamo che gli studenti hanno difficoltà nell'applicare le competenze e le conoscenze matematiche per modellizzare e risolvere problemi, perdendo di vista il legame tra il linguaggio matematico e la realtà che esso descrive.

Se l'obiettivo dell'insegnamento è quello di utilizzare la matematica per descrivere la realtà, credo che la prospettiva giusta sia quella di pensare alla matematica come ad un linguaggio, ed insegnarla come una lingua straniera.

Per apprendere una lingua, è necessario studiarne la grammatica, leggere opere letterarie e poetiche, ascoltare e soprattutto esercitarsi nella pratica orale e scritta. Allo stesso modo, per la matematica abbiamo una parte grammaticale, una parte lessicale, ma soprattutto una parte espressiva. L'obiettivo finale dovrebbe essere quello di mettere gli studenti in grado di esprimere pensieri originali utilizzando il linguaggio matematico o almeno di comprendere i discorsi degli altri.

Nel corso del tempo, ci siamo concentrati molto sull'insegnamento della grammatica e del lessico matematico, ma abbiamo trascurato l'aspetto espressivo. Spesso abbiamo formato eccellenti risolutori di esercizi che poi si trovano in difficoltà nel modellizzare problemi reali o nel comprendere formule fisiche.

Pochi hanno un lavoro che richieda di risolvere equazioni, ma la grande maggioranza dei lavoratori ha a che fare con numeri, grafici, modelli.

L'esercizio matematico dovrebbe servire a vedere fino a che punto lo studente si è impadronito del linguaggio. Invece nell'immaginario comune l'esercizio è diventato un fine: impariamo la matematica per risolvere gli esercizi, invece di fare gli esercizi per vedere se abbiamo capito la matematica.

Io credo che siamo arrivati a questo punto perché gli esercizi sono oggettivi, sono facili da correggere, sono facili da reperire.

Brutto dirlo, ma invece di essere noi insegnanti di matematica a muoverci nella direzione dell'insegnamento della lingua matematica, sono gli insegnanti di lingue a muoversi verso test grammaticali preconfezionati e di immediata correzione. Di questo non siamo responsabili, ma invece siamo responsabili della deriva che ha preso l'insegnamento della fisica, proposto sempre più spesso tramite esercizi (anche alla maturità scientifica). Nascondendo il rapporto con l'esperimento, il metodo scientifico, la modellizzazione. "Fossilizzando" l'insegnamento della fisica, per dirla come Lucio Russo. Nascondendo il rapporto tra matematica e realtà tangibile, tra il modello e il fenomeno che lo ha motivato. Cioè la maggior parte degli aspetti che rendono la fisica interessante per uno studente che non sceglierà di continuare lo studio delle materie scientifiche.

Percepisco un grande sforzo di rinnovamento nell'insegnamento della matematica, ma non altrettanto per la fisica. I miei figli e i loro compagni in generale apprezzano la fisica meno di quanto era ai miei tempi di studente delle superiori, e credo che questo sia dovuto alla scomparsa degli aspetti di esplorazione e di scoperta nella pratica dell'insegnamento, soprattutto al liceo scientifico.

Rifacendoci al titolo di questa tavola rotonda, toccare con mano serve a consolidare il legame tra linguaggio e contenuto, risponde agli obiettivi di una didattica della matematica mirata a fornire un mezzo espressivo, a formare studenti in grado di utilizzare la matematica per comprendere la realtà. L'insegnamento della matematica ha bisogno di un contesto sia per facilitare l'apprendimento sia perché è in un contesto reale che le competenze dovranno essere spese.

Tramontata l'idea Piagettiana di un pensiero logico come naturale punto di arrivo delle fasi dello sviluppo cognitivo, le scoperte delle neuroscienze suggeriscono l'esistenza di un "pensiero plurale", che coinvolge contemporaneamente tutti i piani, da quello sensoriale a quello più astratto. Per essere efficace, l'insegnamento della matematica dovrebbe essere altrettanto plurale: offrire stimoli tattili e visivi attraverso oggetti concreti da manipolare, per poi procedere in un percorso di modellizzazione e astrazione.

Toccando con mano si apprende meglio e più volentieri. È più facile ricordare, associando l'esperienza sensoriale alle nozioni apprese. A patto che lo studente faccia uno sforzo di astrazione e di sistemazione che alle superiori non è né facile né scontato. Se alle elementari la regola è dietro l'angolo, alle superiori, soprattutto in Fisica, c'è spesso un grande lavoro da fare per andare al significato delle esperienze.

Io insegno meccanica quasi esclusivamente attraverso esperimenti, cui i ragazzi partecipano con grande entusiasmo e grande impegno. Il lato negativo è forse l'apprendimento a lungo termine delle leggi fisiche. Il lato positivo è la comprensione del metodo sperimentale, la capacità di distinguere scienza e non-scienza, lo sviluppo delle competenze di modellizzazione e la comprensione dei limiti del ragionamento sui modelli.

Insegnando matematica, cerco di creare contesto in tutte le maniere possibili: toccando con mano, ma anche proponendo gli sviluppi storici del pensiero matematico, collegando la matematica con le altre discipline, inserendola nel suo ruolo naturale nella storia del pensiero. In generale, cerco di

- passare continuamente tra i vari piani, dal concreto all'astratto;
- presentare oggetti tangibili;
- spiegare il problema prima di dare la soluzione;
- creare contesto, inquadrando storicamente gli argomenti, i temi, le dispute;
- chiedere che gli elaborati siano leggibili, con i passaggi logici spiegati;
- affrontare uno stesso problema in più linguaggi (algebrico, geometrico, analitico);
- proporre problemi diversi che vengono rappresentati da uno stesso modello;
- cercare ovunque possibile di legare la matematica alla fisica.

Cerco di evitare percorsi unidimensionali e di presentare diverse strade e diversi linguaggi per affrontare un problema. Sviluppare così le competenze di modellizzazione difficili da raggiungere altrimenti in un liceo classico.

Non si tratta di idee originali. Sono approcci largamente utilizzati e insegnati nei corsi di didattica. Spunti interessanti sono venuti e stanno venendo da varie sperimentazioni, ultima in ordine di tempo l'esperienza del "Liceo Matematico". Manca tuttavia, soprattutto nel panorama dei libri di testo, un metodo, un approccio sistematico. Il passaggio dal concreto all'astratto, lo spostamento del punto di vista, il cambiamento di linguaggio dovrebbero, a mio modo di vedere, essere proposti in maniera incessante.

Inutile nasconderlo, i risultati sono al di sotto delle mie ambizioni. In parte perché anche io tendo a misurare gli apprendimenti sulla capacità di risolvere esercizi piuttosto che sulla proprietà di linguaggio. Se l'obiettivo è la risoluzione dell'esercizio, il metodo di insegnare la soluzione prima del problema è tutto sommato efficace. Come ho detto, è un obiettivo troppo limitato.

Detto di obiettivi e di metodi, voglio spendere qualche parola sugli ostacoli che gli studenti trovano nell'apprendimento della matematica. Il principale è sicuramente di natura psicologica. Troviamo studenti ossessionati dalla paura di sbagliare. Perché in matematica, nella matematica degli esercizi, c'è il giusto e lo sbagliato. E hai voglia a spiegare che la pretesa di imparare senza sbagliare è assurda. Talmente radicata è la convinzione che la matematica si limiti a dare la risposta giusta all'esercizio, che gli studenti non riescono ad apprezzare i progressi che pure spesso sono di tutto rispetto.

Tornando al parallelo con le lingue straniere, è come se lo studente ad ogni errore grammaticale ricevesse una bacchettata. L'effetto sarebbe totalmente castrante. Ma è quello che tendiamo a fare insegnando la matematica attraverso i soli esercizi.

Ma se l'unico metro è quello del giusto e dello sbagliato, gli studenti stessi spingeranno verso un apprendimento procedurale, ripetitivo e meccanico. Il contrario di quanto raccomandato dalle indicazioni nazionali. Prima la soluzione e poi il problema. "Tu mi dici cosa devo fare e io lo faccio", citando un famoso tormentone. Ma l'arte di seguire le ricette è la pasticceria, non la matematica.

È anche una questione di programmi e di quadro orario. Alcune idee di fondo si sono rivelate inefficaci. In particolare, dobbiamo smettere di credere che il percorso progettato per il Liceo Scientifico possa essere facilmente adattato ad altre realtà scolastiche tramite semplici tagli mirati. Le differenze sostanziali in termini di obiettivi, contesto di apprendimento e orario delle lezioni rendono questo approccio del tutto insensato.

Per quanto riguarda il Liceo Classico, il monte ore è talmente limitato, che semplicemente non c'è abbastanza tempo per esercitarsi. L'idea di proporre esercizi finché lo studente non riesce a fare i collegamenti, non è attuabile. O ci si limita ad una infarinatura superficiale, magari coltivando a parte le eccellenze, o bisogna cambiare approccio, mostrare agli studenti la strada, arrivare ai concetti matematici contestualizzando i problemi in altro modo.

Per fare qualche esempio concreto di argomenti che nel Liceo Classico andrebbero ripensati, la geometria razionale non dovrebbe essere insegnata a 14 anni e non con l'assurda versione edulcorata dell'assiomatica di Hilbert che si è imposta negli anni e che fa acqua da tutte le parti. Troppo astratta, troppo slegata dalla realtà, non inquadrata storicamente. Molto meglio tornare alla versione di Euclide, spostandola di due anni, facendola precedere da una seria spiegazione del perché e del come si è arrivati all'idea di assiomatizzazione.

Come non si comincia lo studio della filosofia da Kant e nemmeno da Platone, così non si dovrebbe iniziare lo studio della geometria razionale da Hilbert e nemmeno da Euclide. Fare una rapida, anche rapidissima introduzione alla dimostrazione preeuclidea sarebbe fondamentale.

Le derivate sono un altro argomento sulla cui presentazione vale la pena di soffermarsi. Definiamo le derivate come limite del rapporto incrementale e le proponiamo due anni dopo aver parlato di cinematica e di dinamica. Un percorso perfettamente adatto ad uno studente universitario, al quale prima definiamo i numeri reali, i limiti ed infine le derivate; perché questa è la migliore sistemazione logica. Ma è la più efficace didatticamente? L'invenzione della derivata precede di un secolo e mezzo quella di limite. Un secolo e mezzo in cui la Fisica si è sviluppata utilizzando il calcolo di Newton e Leibnitz ma non gli epsilon e i delta. Nascondere lo sviluppo del pensiero matematico nel suo percorso è a mio modo di vedere un'occasione persa e complica di molto la comprensione del concetto di limite.

Finisco, seguendo la sollecitazione di Benedetto Scoppola, con una piccola considerazione sulla spinta alla digitalizzazione della matematica. Personalmente non sono contrario, ma ne avverto il pericolo. Credo che siamo troppo ancorati ad una visione restrittiva di cosa sia la matematica. Se la matematica è il linguaggio per rappresentare la realtà, qualunque linguaggio di rappresentazione della realtà in termini quantitativi deve essere considerato matematica; se usiamo un linguaggio di programmazione per rappresentare un problema cinematico, quella è matematica; se utilizziamo un foglio di calcolo per elaborare dei dati, quella è matematica; se utilizziamo un grafico, quella è matematica.

Sono scettico sull’utilizzo di ausili informatici (prima tra tutti la calcolatrice) che fanno perdere agli studenti il contatto con le operazioni. Decisamente contrario all’uso delle simulazioni di fenomeni fisici preconfezionate. Ma totalmente a favore degli strumenti informatici come linguaggi di modellizzazione.

Il foglio di calcolo, tanto per fare un esempio, è uno strumento con potenzialità di modellizzazione grandissime, ottimo come attività pre-algebrica per arrivare al concetto di variabile e fornisce competenze spendibili in un domani lavorativo. Può essere senz’altro inserito nell’insegnamento della matematica, a patto di non considerarlo una grossa calcolatrice.

In conclusione, l'insegnamento della matematica e della fisica dovrebbe mirare a sviluppare le capacità di ragionamento, comprensione e applicazione, non solo attraverso l'apprendimento di formule ed esercizi, ma anche fornendo contesti reali, incoraggiando l'espressione e l'applicazione pratica delle conoscenze matematiche e promuovendo un approccio plurale e stimolante. Insegnare matematica e fisica alle superiori è un’avventura straordinaria. Un mestiere creativo e coinvolgente su tutti i piani. Non sempre si riesce a portare il dialogo didattico sui giusti binari, ma nello sforzo, nel tentativo di creare percorsi e connessioni risiede gran parte della ricchezza di questo lavoro.

Ringrazio Elisabetta Scoppola per l'organizzazione, il moderatore Benedetto Scoppola per gli spunti di discussione e tutti i partecipanti alla tavola rotonda per l'interessante scambio di idee.

# *Cosa vuol dire dividere*

*Franco Ghione*
Università di Tor Vergata

In questo breve intervento vorrei discutere il seguente tema posto da Benedetto Scoppola nell'introdurre questa tavola rotonda:

*"Quale credete possa e debba essere, nella scuola, il rapporto tra la storia del pensiero scientifico e il suo insegnamento/apprendimento?"*

Partiamo da una constatazione di Giorgio Parisi apparsa in un suo articolo sulla Stampa il 20 dicembre del 2022.

*"Leggendo i giornali, mi sono convinto che la scuola italiana non insegna le moltiplicazioni e le divisioni. Come è noto, nelle scuole elementari, medie e superiori vengono fatte moltiplicazioni e divisioni in tutte le salse. Tecnicamente gli studenti sanno farle; sfortunatamente non s'insegna la cosa più importante: quando e perché fare queste operazioni."*

Non c'è motivo di dubitare di queste affermazioni, ma perché succede questo?

Un motivo ovvio è la mancanza di protocolli di formazione per gli insegnanti. All'Università nella maggioranza dei casi non esiste alcun indirizzo dedicato alla didattica della matematica. La SSIS

(Scuola di specializzazione all'insegnamento secondario) istituita nel 1990 da un governo Andreotti e attuata a partire dal 1999 dal ministro Berlinguer durò per X cicli biennali e fu sospesa dal ministro Gelmini e sostituita dal TFA (Tirocinio formativo attivo) di durata annuale che cominciò la sua attività nell'anno accademico 2011-2012 per essere definitivamente soppresso dal governo Renzi nel 2015 che propose un nuovo percorso, più breve, mai attivato. La mancanza di un progetto condiviso a lungo termine sulla formazione degli insegnanti, capace di superare i colori dei diversi governi, la poca attenzione al declino che, a partire da ministro Berlinguer, portava la scuola pubblica italiana verso un irrefrenabile collasso, produsse alla fine l'attuale vuoto legislativo.

I progetti nazionali finanziati con fondi ministeriali come il Progetto Lauree Scientifiche istituito nel 2004 dal Ministro Moratti, rivolto agli insegnanti delle scuole superiori, la Fondazione I Lincei per la Scuola nata nel 2015 sulla spinta dell'Accademia Nazionale dei Lincei con lo scopo di promuovere una nuova didattica nella scuola di ogni ordine e grado non riuscirono a incidere in modo significativo a livello nazionale. A questo si aggiunga una prolificazione di progetti di formazione locali gestiti da associazioni private, spesso di dubbia consistenza culturale, che, invece di supplire a una colpevole mancanza istituzionale, aumentò la confusione aggravando ulteriormente la situazione.

Un secondo motivo si lega al fatto che alcuni concetti elementari alla base dell'edificio matematico, insegnati nelle scuole medie, diversamente da quanto si possa credere, non sono né semplici né naturali, anzi vi sono oggettivi ostacoli cognitivi che ne rendono problematica la comprensione. Tra questi il concetto di frazione e come questa si leghi con l'operazione di divisione. Già Emma Castelnuovo[1] nel 1953 ne evidenziava la complessità didattica suggerendo possibili soluzioni e una scansione del loro studio nei tre anni delle medie.

In generale l'inversione di una operazione riesce innaturale per il nostro pensiero. Mentre l'addizione, la moltiplicazione, l'elevamento a potenza sono operazioni facilmente concepibili una volta chiarito l'algoritmo di calcolo, la sottrazione, la divisione e il logaritmo richiedono al pensiero uno sforzo che va allenato nel tempo attraverso l'esercizio e l'attività scolastica. In modo più formale, se F è una procedura ben definita che applicata a un numero a produce un risultato F(a) per calcolare F(a) basta applicare la procedura al numero a e il nostro pensiero va spedito, ma, se ci poniamo il problema inverso, e cioè, dato il numero A, cerchiamo quel numero x tale che

$$F(x) = A$$

il nostro pensiero si perde. Intanto non è neppure chiaro quale sia il campo numerico nel quale cercare la soluzione e già questo ci lascia disarmati. Se ci domandiamo, ad esempio, qual è quel numero che

[1] CASTELNUOVO E. (1952), L'insegnamento delle frazioni, in La scuola secondaria e i suoi problemi, pp. 75-80

moltiplicato per 3 fa 7 la nostra mente si trova a disagio; può procedere per tentativi ma i casi da testare appartengono a un campo generalmente indefinito. Certamente quel numero non è 2, non è 3, forse tale numero non esiste. In realtà non sempre 7/3 è stato considerato un numero, anzi, in molti manuali elementari si considerano le frazioni, come in Euclide, solo come operatori che agiscono su una data grandezza e per questo 7/3 di qualcosa ha perfettamente senso, ma 7/3 più qualcosa o 7/3 per qualcosa diventa, per i più, di difficile comprensione. Molta parte della matematica di tutti i tempi si basa sull'idea di inversione e il primo momento non banale in cui questa idea prende, o dovrebbe prendere corpo, è proprio nell'operazione di divisione. Una soluzione semplice per superare le difficoltà cognitive legate al concetto di inversione, è quella di presentare la divisione come una operazione diretta dando cioè una procedura per poterla calcolare.

Se, nelle scuole elementari, questo può avere un senso - ma anche su questo è legittimo avere dei dubbi - diventa criminale far finta di niente nascondendo la difficoltà nelle scuole secondarie. Se siamo abituati a pensare che 7 diviso 3 fa 2,3 faremmo per sempre fatica a capire che 7 diviso 3 è quel numero che moltiplicato per 3 fa 7, proprio perché 2,3 moltiplicato per 3 non fa 7!

Mancando un percorso di specializzazione per gli insegnanti della scuola secondaria che metta al centro questi aspetti elementari con una attenzione specifica alle ostruzioni cognitive che essi comportano, agli insegnanti non resta altra strada che affidarsi ai libri di testo. In quei libri c'è una desolante rinuncia a sviluppare il ragionamento e "i perché" fondamentali diventano regole da imparare a memoria. Eccone alcuni per lo più mai esplicitati

Perché $\frac{m}{n}$ di $a$ è uguale a $\frac{m}{n} \times a$ ?

Perché $n = \frac{n}{1}$ ?

Perché $m \times \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$ ?

Perché $\frac{m}{n} = \frac{m \times p}{n \times p}$ ?

Perché $\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n}$ ?

Perché $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{m \times p}{n \times q}$ ?

Perché $a: b = c: d$ se e solo se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ?

Un sotterfugio per aggirare la difficoltà didattica, purtroppo molto diffuso, consiste nel non porsi questi problemi dicendo semplicemente che queste proprietà sono valide "per definizione" e che quindi vanno solo imparate a memoria. Ma forse nella mente dello studente la domanda, anche se non viene espressa con chiarezza, si pone e la mancanza di risposte contribuirà ad alimentare confusione producendo un vuoto di comprensione nei confronti della matematica così frequente nella nostra popolazione. Ed è proprio l'aritmetica elementare con le sue procedure di calcolo l'argomento che nella nostra scuola soffre di più, forse perché viene generalmente considerata una materia noiosa ed esclusivamente tecnica, intorno alla quale si fa poca ricerca didattica, una materia priva di umanità come se non ci fossero state persone, mosse da esigenze molto concrete, che nel tempo l'anno forgiata, per poi insegnarla cercando di superare le stesse difficoltà che abbiamo noi oggi nel proporla ai nostri allievi.

Già Tartaglia, nel XVI secolo, nella sua Aritmetica criticava il modo, molto diffuso anche ai suoi tempi, di insegnare le operazioni aritmetiche facendo ricorso a regole e regolette da imparare a memoria:

*"Tutti quelli (per quanto ho visto); che fin hora hanno dato regola; al summar, sottrar et partir de rotti; la hanno data di sorte che l'huomo presto la intende, et presto se la scorda, il che non procede da altro; salvo che per ignorar la causa di tal sua regola, over di tal suo operare."*

Nella scuola superiore il senso delle operazioni aritmetiche è dato per scontato, senza bisogno di commenti, di specifiche, di esempi problematici, di confronti, come se l'aritmetica fosse sempre stata, come se non ci fosse nulla da capire ma solo da ritenere a mente: una sorta di "tassonomia operativa" da acquisire attraverso una serie infinita di esercizi. Riteniamo invece che il modo migliore per recuperare il senso - mi vien di dire "il profumo" - dell'aritmetica, sia risalire alle origini dei concetti, come ci insegna Maria Montessori: solo in questo modo possiamo ritrovarne il significato perché ciò che nasce non nasce senza motivo.

Le origini dell'Aritmetica moderna si trovano nel *Liber abbaci* di Leonardo Pisano detto Fibonacci.
Si tratta di un monumentale e geniale trattato che risale al 1202, non ancora sufficientemente divulgato se pensiamo che Leonardo Pisano è noto quasi unicamente per la "successione di Fibonacci", un brevissimo frammento di quel trattato e che, solo in tempi recentissimi, è uscita, con l'editore Hoepli, l'edizione critica di questo fondamentale testo ad opera di Enrico Giusti e Paolo D'Alessandro. È in questo trattato che viene introdotta, nell'Europa di lingua latina, insieme allo zero, la scrittura posizionale dei numeri interi con le cifre indo-arabe e l'aritmetica moderna: dalle frazioni, coi relativi algoritmi di calcolo, ai numeri reali, spazzando via l'obsoleta scrittura romana dei numeri. L'Aritmetica e con lei la nuova matematica che oggi chiamiamo Algebra, introdotta secoli prima dai matematici arabi, attraverso lo studio delle equazioni di secondo grado, poteva con quel Liber prendere il volo rivoluzionando l'economia, le scienze e la società intera. Nel nostro libro (di Laura Catastini e mio), *La matematica che trasformò il mondo*, pubblicato da Carocci, cerchiamo di raccontare la storia della nascita della Aritmetica moderna in Europa e lungo questa strada si scopre, non senza sorpresa, che essa è figlia degli elementi di Euclide. I nuovi numeri, oggi

chiamati numeri misti[2], introdotti da Leonardo Pisano, ma che coincidono con i nostri numeri razionali, facilmente si identificano, fissata una unità di misura per le lunghezze, con i segmenti. Il teorema di Talete permetteva di dividere con riga e compasso in $n$ parti uguali un dato segmento dando una guida intuitiva al concetto astratto di frazione unitaria e da lì di numero frazionario. Anche il prodotto di due numeri misti poteva identificarsi con l'area di un rettangolo che avesse per lati i segmenti corrispondenti ai due fattori del prodotto. Questo permetteva di trovare, nel rigore della geometria euclidea, la causa del tal suo operare e il nostro ragionare poteva procedere spedito anche quando il vecchio senso delle operazioni fosse venuto meno.

In particolare, per tornare alle considerazioni di Parisi sulle divisioni, se guardiamo da un punto di vista storico ci accorgiamo che le due operazioni di moltiplicazione e divisione, strettamente collegate tra loro, subiscono una naturale evoluzione, decisamente ignorata nel nostro insegnamento scolastico, cambiando nel corso di questo processo il loro significato iniziale. Ci pare utile ricordare qui, per sommi capi, questa evoluzione.

Se $n$ e $a$ sono due numeri interi il loro prodotto $n \times a$ è, per come viene introdotto da Euclide nel VII libro degli Elementi, la somma ripetuta di $a$ con se stesso $n$ volte

---

[2] Si tratta di numeri dati da una parte intera a cui si aggiunge una frazione minore di 1, scritti sottintendendo il segno più.

$$n \times a = a + a + \cdots + a \quad \text{(n volte)}$$

Questa operazione è ovviamente distributiva nel senso che, nella somma di $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (n volte), comparirà il fattore *a* (*n* volte), il fattore *b* (*n* volte) e nessun altro fattore, cioè

$$n \times (a + b) = n \times a + n \times b$$

Sarà l'estensione ai nuovi numeri misti di questa proprietà del calcolo aritmetico, insieme alla proprietà associativa e commutativa del prodotto, a guidare in modo naturale questa storia.

Tornando alla divisione, se abbiamo $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} + \cdots + \boldsymbol{a}$ (n volte) cioè se

$$A = n \times a$$

il numero *A* viene diviso in *n* parti uguali ad *a* e Euclide ci dice che *a* è l'ennesima parte di *A* cioè è il risultato della divisione di *A* con *n* ugualmente a come avviene se *A* è un segmento.

Ad esempio se $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{6}$ e $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{2}$ allora 6 diviso 2 fa 3, ma anche se $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{7}$ e $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{3}$ possiamo dividere 7 in 3 parti uguali e il risultato della divisione è $\boldsymbol{2} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}$, numero che, come fa Leonardo Pisano e poi tutti i suoi successori fino al XVIII secolo, viene scritto nella forma mista $\boldsymbol{2}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}$ sottintendendo il segno di somma. Il fatto che $\boldsymbol{2}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}$ sia la terza parte di 7 è dimostrato dal fatto che

$$2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3}+2\frac{1}{3}=7$$

proprio perché 3 volte 1/3 è 1. Prima che questi numeri con la loro aritmetica fossero concepiti non era possibile dividere con esattezza un qualsiasi numero intero *A* per un qualsiasi numero intero *n*. Ora la cosa è sempre possibile però il risultato è, in generale, espresso con un nuovo numero, un numero misto che ha una sua propria aritmetica che estende quella valida per i numeri interi.

Già questo è un enorme progresso nella teoria del calcolo rispetto al modo grossolano di calcolare con l'abaco romano e i relativi numeri romani, come veniva fatto prima di Leonardo Pisano, senza una teoria delle frazioni.

Ma le nuove esigenze economiche ci chiedono di saper eseguire la divisione di un numero *A* in *n* parti uguali anche se *A* non è un numero intero proprio perché i numeri da dividere sono spesso i risultati di determinate misure e come tali non sono espressi da numeri interi ma da numeri misti.

Leonardo Pisano ci insegna come poter fare questo in modo esatto e nel farlo si accorge con grande sorpresa che i nuovi numeri misti, comunque essi siano, possono "dividersi" tra loro producendo come risultato ancora un numero misto. Per fare questo si dovrà interpretare la divisione come operazione inversa della moltiplicazione. *A* diviso *a,* qualunque sia la natura dei due numeri *A* e *a*, è semplicemente quel numero *x* tale che $a\times x=A$ così che $\frac{1}{12}$ diviso $\frac{1}{3}$ è uguale a $\frac{1}{4}$ proprio perché

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. In definitiva il significato originario della divisione che era quello di scomporre il numero *A* in un certo numero di parti tutte uguali tra loro, in modo da ottenere *A* come la somma, un certo numero di volte, di *x* con se stesso, cambia radicalmente perché il numero di volte è per sua natura un numero intero e non ha senso sommare una quantità *x* con se stessa 1/3 di volte. Tuttavia se pensiamo alla somma di *x* con se stesso *a* volte come il prodotto aritmetico $a \times x$, tale prodotto ha senso anche quando il primo fattore *a* non è intero e questo ci permette di dare coerentemente un significato alla frase che prima non aveva senso: sommare una quantità *x* con se stessa *a* volte significa semplicemente moltiplicare *x* con *a*. Dunque

$$A = a \times x \text{ se e solo se } \frac{A}{a} = x,$$

solo che ora, se *a* non è intero, il significato di $a \times x$ è solo quello di prodotto e non più l'antico significato di somma ripetuta *a* volte della quantità *x*. Ma come si ottiene il prodotto $a \times x$ quando *a* non è intero? e quale è il suo nuovo significato? Questo è un punto molto importante nella aritmetica delle frazioni che si scioglie utilizzando il fatto che $\frac{1}{n}$ "di" una grandezza *A* è uguale, quando *A* è un numero, a $\frac{1}{n}$ "moltiplicato" A. Infatti $\frac{1}{n}$ "di" *A* è quel numero che moltiplicato per *n* restituisce il numero *A*, ma anche $\frac{1}{n} \times A$ moltiplicato per *n* restituisce *A* dato che, pensando a

$\frac{1}{n}$ come a un numero e non come un operatore, abbiamo per ragioni puramente aritmetiche

$$n \times \left(\frac{1}{n} \times A\right) = \left(n \times \frac{1}{n}\right) \times A = 1 \times A = A$$

Ragionando in questo modo ci accorgiamo che $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ è la terza parte di $\frac{1}{4}$ e poiché $\frac{1}{4}$ è la quarta parte di 1, $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{4}$ è la terza parte della quarta parte di 1 è cioè la dodicesima parte di 1.

Dice ancora Tartaglia

*"Maravigliati del atto di multiplicar di rotti, perche in quello sempre si vede riuscire al contrario di quello che dinota tal vocabulo, qual non dinota altro che crescere, overo augumentare, et nel detto multiplicare de rotti sempre accade (come è detto) tutto al contrario, cioe che il produtto è sempre menore di qual si voglia di duoi precedenti..."*

Se non portiamo i nostri studenti a vivere questa meraviglia l'aritmetica non potrà che apparire una tecnica noiosa, disumana da affidare preferibilmente a una macchina.

Alla fine della storia il solo significato che la divisione viene ad assumere è quello di operazione inversa della moltiplicazione, e l'algoritmo della divisione è il primo importante procedimento che ci permette di risolvere, se a è diverso da zero, l'equazione di primo grado

$$a \times x = A$$

Tutto questo resta nella mente degli studenti estremamente vago tanto che le formule "inverse" vengono interpretate come nuove formule da imparare a memoria senza capire che, ad esempio, la relazione $V \times T = S$ è un altro modo di dire che $V = \frac{S}{T}$ o che $T = \frac{S}{V}$ .

Purtroppo, a peggiorare la situazione, subentra la divisione con la virgola introdotta da Stevino tre secoli dopo Leonardo Pisano, che finisce per inquinare ancora di più la bella storia che fin qui abbiamo raccontato. Questo algoritmo viene insegnato nella scuola elementare e finisce per rafforzare, come abbiamo detto, l'idea sbagliata che il risultato della divisione tra 7 e 3 non sia quel numero che moltiplicato per 3 fa 7 , cioè $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ , ma il numero 2,3 che ne è solo una approssimazione. Seguendo questa via si dovrebbe dire che il risultato della divisione di 7 con 3 è il limite della serie $2 + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3}{10^n})$ cosa ovviamente improponibile nelle scuole medie. Si resta così ancora nel vago aumentando i dubbi e le incomprensioni negli studenti mentre, seguendo Leonardo Pisano, con lo stesso algoritmo, dati due numeri interi *A* e *a* possiamo calcolare, come anche ci insegna Euclide, due numeri *q* ed *r* univocamente individuati dalle relazioni:

$$A = a \times q + r \text{ con } 0 < r < a.$$

Ma ora, come per magia, una volta introdotti i nuovi numeri misti con la loro aritmetica, la divisione di *A* con *a*, produce, come ogni altra operazione aritmetica, un ben determinato risultato che è proprio quel numero $q\frac{r}{a}$ che moltiplicato per *a* restituisce *A* dato che:

$$a \times q\frac{r}{a} = a \times \left(q + \frac{r}{a}\right) = a \times q + a \times \frac{r}{a} =$$

$$= a \times q + r = A.$$

L'esistenza e unicità di questi due interi *q* ed *r* è il fondamento assiomatico di una struttura algebrica fondamentale, quella di anello euclideo, che rappresenta il punto di partenza della moderna teoria della divisibilità. Il percorso storico che abbiamo indicato permette di saldare in modo chiaro i concetti originari di frazione e l'aritmetica che ne deriva con l'attuale formalizzazione astratta che viene trattata nei primi corsi universitari, fornendo una guida intuitiva che permette di cogliere con pienezza il rapporto che intercorre tra l'algebra astratta e le esigenze di uno strumento di calcolo sempre più preciso e aderente allo sviluppo della società medioevale che a queste idee diede origine.

# *Sviluppare il pensiero astratto nei preadolescenti*

*Daniele Pasquazi*
Liceo B. Touschek di Grottaferrata (Roma)

## *1. Introduzione*

La frase del matematico Hardy, presente sulla locandina del convegno, sottolinea che la sfida intellettuale, anche solo completamente astratta, che la matematica rappresenta è comunque una sfida di grande bellezza. La scuola, deve ovviamente educare anche il pensiero astratto degli allievi. Ciò deve avvenire, secondo Montessori, già a partire dalla scuola primaria tenendo conto, naturalmente, delle capacità e potenzialità dei bambini. Perché è importante stimolare il pensiero astratto?  E cosa fare per svilupparlo? Qui di seguito, si forniscono possibili risposte a queste importanti domande che sono frutto di ricerca nel campo della didattica della matematica e di attività sperimentate con studenti e docenti.

## *2. Convinzioni remote indubbiamente attuali.*

Nel lontano 1921 Federigo Enriques [FE] affermava che la scuola deve educare l'intuizione e la logica come «due aspetti inscindibili di un processo attivo» e che «l'educazione del senso logico dovrà sempre procedere per gradi, dal concreto all'astratto». Anche la didattica della matematica montessoriana è perfettamente in linea con le parole di Enriques come pure quella della Castelnuovo. Stiamo parlando, cioè, di due studiose che sono, tutt'oggi, ancora due punti di riferimento per la ricerca in didattica e per moltissimi insegnanti e non solo italiani. Sono passati cento anni da quelle frasi eppure queste conservano una straordinaria attualità. Ciò è sicuramente confermato dal fatto che, in un recente convegno che si è tenuto il 23 marzo 2023 presso l'Accademia dei Lincei a Roma dal titolo *L'insegnamento della matematica: criticità, nuove sfide, idee*, sono state fatte le seguenti affermazioni: «la scuola deve educare all'astrazione» (P. Cannarsa, presidente dell'UMI), «occorre introdurre gli insegnanti al metodo Montessori e all'Emmametodo mediante opportuna formazione» (M. Mellone, presidente CIIM), «seguire la matematica di Montessori e Castelnuovo creando laboratori di matematica nelle scuole» (G. Parisi, premio nobel per la fisica), «per astrarre occorre passare per problemi pratici» (G. Valditara, Ministro dell'Istruzione e del Merito). Se dopo un secolo ancora c'è la necessità di dover ribadire determinati concetti dobbiamo supporre o che Enriques fosse stato troppo avanti rispetto ai tempi in cui viveva e scriveva oppure che queste idee non sono ancora pienamente condivise nel mondo della scuola. Forse, entrambe le affermazioni hanno un certo grado di verità. La nostra opinione in merito sarà evidente dopo aver letto, nei prossimi paragrafi, alcune proposte didattiche effettuate nelle scuole e le ricerche che le sostengono fornendo indicazioni bibliografiche per eventuali approfondimenti.

### 3. Dalla manipolazione all'astrazione.

Siamo fermamente convinti che per creare nuova vera conoscenza negli studenti occorra sottoporre loro ogni argomento in forma problematica, introdotto con domande aperte alla portata degli studenti, la cui strategia risolutiva necessaria per pervenire alla risposta non sia immediata. Anzi, questa deve essere trovata dagli studenti non senza sforzi, ad esempio, proponendo problemi per i quali i vecchi schemi acquisiti e utilizzati più volte non siano più di aiuto. In questo modo si stimola quello che Wertheimer [W], uno dei padri fondatori della Gestalt, chiamava «pensiero produttivo» che è diametralmente opposto a quello «riproduttivo» conseguenza di una abitudine a risolvere esclusivamente esercizi stereotipati e uguali tra di loro. Per un giovane, essere abituato a produrre un pensiero produttivo significa essere in grado di saper «attaccare» (a prescindere dall'esito) un qualunque problema e non necessariamente matematico. Il pensiero produttivo rientra, dunque, tra le competenze più importanti da acquisire nella scuola come riportato, seppur con parole diverse, sia nelle Indicazioni Nazionali della scuola del primo ciclo [INPC, pag.63] che in quelle del secondo [INSC, pag.337]. È quanto mai opportuno, infine, che i problemi posti rientrino possibilmente nella sfera d'interesse dei giovani. Si lavora così con studenti più motivati e ciò costituisce una condizione necessaria per stimolare curiosità che è un elemento indispensabile nell'apprendimento.

Un altro aspetto che vogliamo sottolineare in questo contributo è la modalità con la quale gli studenti, per lo più della scuola del primo ciclo, sono chiamati a lavorare durante le nostre proposte didattiche. La modalità laboratoriale ci sembra la più idonea nella quale proporre problemi aperti. In questo modo, gli studenti, generalmente divisi in piccoli gruppi, sono attivi, propongono congetture, discutono, negoziano con i propri compagni fino a raggiungere una conclusione condivisa. Tale modo di procedere permette a queste nuove generazioni di studenti, ormai poco abituate ad ascoltare passivamente lezioni esclusivamente frontali, di essere invece protagonisti del proprio apprendimento.

Nella modalità laboratoriale trovano un naturale utilizzo strumenti di lavoro che rendono la classe molto simile ad una bottega di un artigiano. In questo contesto ci riferiamo, in generale, a *manipolativi artificiali* [BBM] che, se in grado di aiutare a esplorare, acquisire o investigare concetti matematici prendono il nome di *manipolativi matematici*. È mediante l'interazione con questi strumenti didattici che gli studenti sono facilitati a verificare la bontà delle loro congetture e ad auto correggersi se necessario. L'importanza dell'uso in didattica dei manipolativi ha un peso notevole specie se si pensa al ruolo che oggi viene attribuito al nostro sistema motorio ai fini della cognizione.

Infatti, grazie a studi eseguiti su primati, la cui corteccia è piuttosto simile a quella dell'uomo, sono state fatte congetture sul nostro modo di apprendere. Dietro una semplice prensione di un oggetto c'è una forma di cognizione [RLM]. Abbiamo voluto applicare tali risultati in didattica ma, per le sue peculiarità, abbiamo dovuto formulare ipotesi innovative che verranno qui di seguito esplicitate. Ulteriori studi scientifici hanno inoltre dimostrato che la manipolazione di un qualunque strumento amplifica le nostre capacità percettive [CFRU1] che, a loro volta, guidano la nostra azione sullo strumento [CFRU2]. Questa continua interazione tra azione e percezione contribuisce in modo significativo al nostro apprendimento [RL]. Questo binomio azione e percezione, in didattica, è fondamentale se si pensa allo studente che interagisce con un manipolativo matematico in grado di facilitare l'accesso ad un determinato significato. In più, l'azione manuale autonoma è strettamente correlata con il controllo dei concetti pregressi posseduti dallo studente. Dando per buono che tali concetti siano in linea con gli aspetti teorici di riferimento le scoperte dello studente avvengono nel pieno rispetto dei suoi tempi di apprendimento, senza imposizioni dall'alto, senza fretta. Un apprendimento avvenuto in questo modo, e ciò si comprenderà meglio più avanti, è più «resistente» al passare del tempo e più profondo al punto di poter essere utilizzato anche al di fuori dello specifico ambito in cui è maturato.

L'interazione con i manipolativi permette di muovere lo strumento o parti di esso. Mediante tale interazione gli studenti sono condotti a comprendere un determinato risultato come conseguenza immediata della loro manipolazione. Congetturiamo che l'efficacia dell'azione manuale di uno studente con il manipolativo matematico sia memorizzata da un complesso circuito neuronale che collega l'area somatosensoriale a quella prefrontale analogamente a ciò che avviene, come è stato già detto, durante una prensione [RLM]. Quando in una nuova occasione, siamo chiamati a riutilizzare lo stesso strumento per gli stessi scopi, accediamo ad una «memoria motoria» che ci consente di ricordare il modo utile in cui lo strumento è stato utilizzato per raggiungere il medesimo risultato.

Non solo: si congettura che, di fronte ad una figura che ricorda, per le sue caratteristiche, un determinato manipolativo con cui si è interagito si riesca a immaginare i medesimi movimenti effettuati sul manipolativo stesso. Questo perché i neuroni del circuito di cui si congettura l'esistenza non si dovrebbero attivare solo quando la mano dell'individuo interagisce con l'oggetto, ma anche quando semplicemente torna alla mente l'interazione avvenuta, così come avviene con le prensioni [JD]. Stiamo parlando di una forma di cognizione piuttosto pragmatica ma pur sempre di cognizione si tratta. Specie se lo strumento in questione è di tipo didattico come i manipolativi precedentemente introdotti. Questi appena descritti non sono gli unici risultati possibili ottenibili dall'interazione con i manipolativi.

Gli studenti devono essere sensibilizzati a scoprire, tra parti in movimento del manipolativo, ciò che invece non varia. Ciò che non varia durante le modifiche attuate durante la manipolazione è riconducibile alle proprietà dell'ente matematico che il manipolativo simula. Inoltre, fatto parimenti importante, è comprendere perché ci sono strutture che variano ed altre che non variano. Abbiamo chiamato quest'ultime *strutture stabili* [P1]. Imparare a individuare strutture stabili durante la manipolazione è molto importante per la ricerca di strategie risolutive di problemi la cui figura risulta essere una rappresentazione grafica uguale o comunque avente le stesse caratteristiche dell'oggetto matematico simulato dai manipolativi con il quale si è interagito. Quindi, si auspica che non si sia solo in grado di immaginare, su tale figura, i medesimi movimenti eseguiti con il manipolativo ma anche di individuare medesime strutture stabili. Abbiamo definito *immaginazione dinamica* la capacità di immaginare movimenti all'interno di una figura statica al fine di riconoscerne le sue strutture stabili.

Si sta sostenendo, dunque, che l'utilità dei manipolativi non è limitata alle scoperte sugli oggetti matematici da questi simulati ma può estendersi ad una famiglia di oggetti che condividano con i precedenti medesimi elementi caratterizzanti. Questo significa che i manipolativi faciliterebbero il trasferimento di quanto appreso attraverso la loro interazione anche in ambiti più generali. Inoltre, recenti studi [Mar], sembrerebbero dimostrare che limitare il numero di informazioni relative all'uso dei manipolativi stimoli molto di più gli alunni a fare scoperte piuttosto consistenti da riuscire a trasferire in ambiti più generali quanto appreso in contesti specifici. Riteniamo questi risultati in accordo con la *muta eloquenza* degli strumenti didattici montessoriani [Mo]. In linea con queste idee, durante le nostre proposte didattiche, riteniamo fornire agli studenti tavole da lavoro sulle quali vengono riportate le formulazioni dei problemi da affrontare ed il relativo manipolativo. Se quest'ultimo è costruito in modo appropriato gli studenti comprenderanno senza particolari difficoltà come usarlo per il raggiungimento degli obiettivi limitandosi a porre domande al docente solo se necessario.

I trasferimenti ai quali abbiamo fatto riferimento possono essere considerati veri e propri processi di astrazione. Naturalmente questi dipendono da osservazioni su figure e non sono supportati dal rigore del linguaggio formale matematico. Riteniamo tuttavia tali processi, seppur primitivi, propedeutici a quelli decisamente più formali che gli studenti acquisiranno più avanti quando avranno più capacità, consapevolezza e maturità. La verifica delle congetture qui riportate permetterebbe di far attribuire ai manipolativi matematici una straordinaria importanza in ambito didattico.

## *4. I manipolativi matematici*

I manipolativi matematici, qui di seguito sinteticamente descritti, sono stati presentati in diverse circostanze a docenti durante corsi di formazione e più volte utilizzati in attività didattiche nelle scuole. Si rimanda, per una lettura più approfondita, a [P2]. Per far scoprire e comprendere agli studenti il significato e l'uso di note proprietà matematiche come le proposizioni euclidee si è ideato il manipolativo rappresentato in Figura 1. Questi è costituito da una *base*, che ricorda una cornice montessoriana, il cui spazio vuoto è indicato con S e da due *figure mobili* in questo caso rappresentate dai triangoli A e B. Gli studenti, muovendo le figure mobili, debbono capire le relazioni sussistenti tra le figure che si ottengono dalla differenza tra lo spazio vuoto della cornice e i due triangoli A e B ossia le superfici S − (A ∪ B).


*Figura 1. Lo spazio vuoto che rimane nella cornice è indicato con S − (A∪B).*

Non solo, per mezzo di opportune domande stimolo, gli studenti scoprono le strutture stabili del manipolativo in questione, ossia che i tre parallelogrammi ottenuti da S − (A ∪ B) hanno sempre la stessa base e la stessa altezza e in più la loro area si ottiene sempre come differenza tra lo spazio vuoto B della cornice e i due triangoli A e B. Per verificare se l'individuazione delle strutture stabili sia utile al trasferimento di quanto appreso anche in altre situazioni si propongono test come quello riportato in Figura 2 nel quale si richiede, dato il rettangolo ABCD avente AB = 4 e DA = 8 di determinare l'area del parallelogramma CDEF.

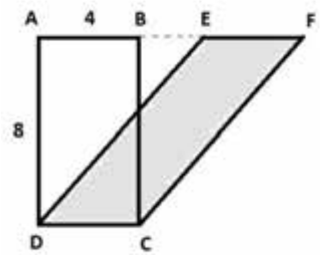



*Figura 2. La figura del test associato al manipolativo della Figura 1.*

Alcuni manipolativi usati per la quadrature di superfici mistilinee sono stati stato realizzati prendendo spunto da figure di Leonardo da Vinci (Figura 3a) che si trovano nel *Codice Atlantico* (per dettagli [P1] e [P2]). Ci limitiamo in questo contesto semplicemente a dire che uno di questi manipolativi, rappresentato in Figura 3b, deve permettere di rispondere al quesito posto da Leonardo ossia la determinazione della superficie mistilinea b (Figura 3a, quella in alto, ricordare che Leonardo scriveva al contrario). Ponendo la figura mobile M all'interno dello spazio vuoto della base B, lo spazio dato da B - M riproduce la figura iniziale b così come pensata da Leonardo (Figura 3c). Poi, muovendo M fino alla posizione opposta (Figura 3d) si scopre che B – M è un rettangolo r che ha la stessa area di b ma del quale è molto più semplice determinarne l'area una volta misurati i suoi lati.

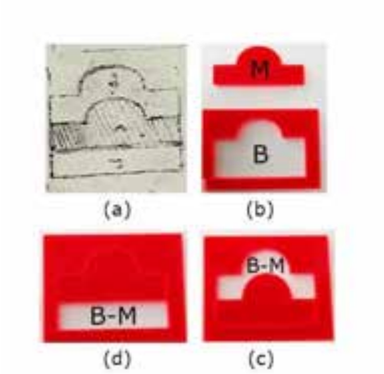



*Figura 3. a: un disegno di Leonardo, Codice Atlantico, Folio 411 recto. b e c: i manipolativi realizzati prendendo spunto dalle figure di Leonardo.*

Anche in questo caso, le strutture stabili da scoprire sono rappresentate da tutte le superfici ottenute da B – M osservando ulteriormente che M⊆B. Un modo possibile per verificare il trasferimento di quanto appreso con tali manipolativi in altri contesti è rappresentato dal quesito riportato in Figura 4 nel quale si chiede di determinare l'area della figura Q.

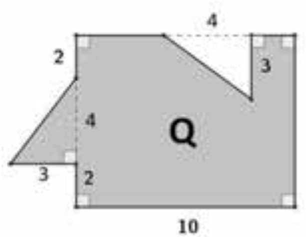



*Figura 4. La figura del test associato al manipolativo della Figura 3.*

## *5. Uno studio psicometrico*

Riportiamo sinteticamente in questo paragrafo i risultati ottenuti in una indagine psicometrica. Si rimanda per maggiori dettagli a [P2]. In questa, si sono coinvolti circa 200 studenti di seconda media provenienti da istituti appartenenti al medesimo territorio. Circa la metà di questi hanno validato un test che aveva lo scopo di permetterci di verificare, oltre ovviamente la correttezza delle risposte fornite, se le strategie risolutive tipicamente utilizzate dei preadolescenti per la risoluzione dei quesiti, già forniti di figura, fossero basate sull'immaginazione dinamica. I quesiti dei test, due dei quali sono stati presentati nel paragrafo 4 (Figure 2 e 4), riguardavano il tema dell'equivalenza e del calcolo dell'area di figure poligonali e curvilinee. L'altra metà degli studenti è stata coinvolta nella vera e propria fase sperimentale. In tale fase, gli studenti partecipanti sono stati divisi in due gruppi omogenei nelle caratteristiche generali (verificato con opportuni test) denominati *gruppo sperimentale* e *gruppo di controllo*. Agli studenti dei due gruppi è stato somministrato il test precedentemente validato denominato *Pre-test.*

Successivamente, i due gruppi sono stati sottoposti ciascuno ad un trattamento (di 3 incontri da 2 ore ciascuno) ma entrambi volti a sviluppare la capacità di immaginazione dinamica. Gli studenti hanno eseguito attività in forma laboratoriale che, anche in questa circostanza, ci è sembrata la modalità più idonea per gli scopi prefissati. Le attività sono state condotte mediante domande aperte concentrate sulla ricerca di strategie risolutive di problemi non standard, tipicamente mai visti in precedenza e non presenti su libri di testo. Tali problemi riguardavano l'equivalenza tra superfici rettilinee, curvilinee e mistilinee. La differenza tra i due gruppi consisteva negli strumenti che si potevano utilizzare. I ragazzi del gruppo sperimentale avevano a loro disposizione opportuni manipolativi matematici, tipo quelli mostrati nel paragrafo 4, attraverso i quali essi potevano fare congetture, auto verificarle fino a fornire le risposte ai problemi posti. I ragazzi del gruppo di controllo, sebbene partecipassero alle medesime attività laboratoriali, avevano a loro disposizione esclusivamente strumenti tradizionali (riga e compasso).

Subito dopo il training a tutti gli studenti è stato somministrato un nuovo test, denominato *Post-test* 1, costituito da quesiti diversi ma del tutto simili nella forma, nei contenuti e negli obiettivi a quelli del *Pre-test*. Sei mesi dopo il *Post-test* 1 è stato somministrato a tutti gli studenti il *Post-test 2* identico al *Pre-test*.

## *6. Discussione dei risultati e conclusioni*

Il *Pre-test* ci ha sostanzialmente indicato che i due gruppi, sperimentale e controllo, in partenza erano del tutto simili. Infatti, dall'analisi delle risposte ai quesiti del test, è emerso che veramente pochi studenti di entrambe i gruppi si sono avvalsi di immaginazione dinamica. Inoltre, il numero delle risposte corrette è stato piuttosto basso.

L'analisi dei risultati del *Post-test* 1 ci ha mostrato una situazione del tutto nuova rispetto a quella di partenza. Infatti, l'immaginazione dinamica è risultata amplificata in entrambi i gruppi in maniera statisticamente significativa. Evidentemente, i training effettuati, sia nel gruppo sperimentale che di controllo, erano risultati entrambi efficaci per i nostri obiettivi. Conseguentemente, anche il numero delle risposte corrette ai quesiti è aumentato sensibilmente.

Se lo studio si fosse concluso con il *Post-test* 1 avremmo dedotto che non era strettamente necessario usare manipolativi matematici per stimolare immaginazione dinamica. Ma il *Post-test* 2, ha mostrato un importante aspetto dello studio. Infatti, nel confermarci il mantenimento degli apprendimenti nel gruppo di controllo ha anche evidenziato una tendenza ancora più diffusa, da parte degli studenti del gruppo sperimentale, di avvalersi di immaginazione dinamica per risolvere i quesiti che ha influito in maniera ulteriormente positiva sul numero delle risposte esatte. In sostanza, il *Post-test* 2 ci dice che il training del gruppo di controllo produce effetti immediati ma non permette agli studenti di fare ulteriori progressi in autonomia nel tempo. Sono i manipolativi a fare la differenza continuando a lavorare, evidentemente, nella mente degli studenti.

In conclusione, possiamo affermare che l'uso dei manipolativi favorisce, evidentemente, un approccio basato su immaginazione dinamica durante la risoluzione di quesiti geometrici. Questo significa che, quanto appreso durante l'interazione autonoma con i manipolativi, si trasferisce nello studio di situazioni più generali evidenziando, dunque, una forma di capacità di astrazione. Tale trasferimento è verificabile ancora 6 mesi dopo la fine dei training dimostrando che la memoria motoria è resistente al passare del tempo continuando a permettere il recupero delle associazioni stabilite tra manipolativo e concetti matematici relativi. Tali risultati ci dicono che per avviare i primi processi di astrazione occorre passare per esperienza concrete così come era stato ipotizzato, molto tempo fa, da Enriques, Montessori e Castelnuovo. Pertanto ci sembra quanto mai opportuno continuare e approfondire studi in tale direzione anche alla luce del crescente interesse che questi stanno acquisendo nel panorama della ricerca internazionale [HGM].

## ***Bibliografia***

[BBM] Bartolini Bussi, M.G., Martignone, F. (2020). *Manipulatives in Mathematics Education*. In: Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education. Springer, Dordrecht, pp. 487-484.

[CFRU1] Craighero, L., Fadiga, L., Rizzolatti, G., & Umiltà, C. (1999). Action for perception: a motor-visual attentional effect. Journal of experimental psychology: Human perception and performance. 25.6, 1673.

[CFUR2] Craighero, L., Fadiga, L., Umiltà, C. A., & Rizzolatti, G. (1996). Evidence for visuomotor priming effect. Neuroreport, 8.1, pp. 347-349.

[FE] F. Enriques (1921). *Insegnamento dinamico*. Periodico di matematiche. pp6 -16.

[INPC]
https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf
[INSC]
https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
[HGM] Hawes Z.C.K., Gilligan-Lee K.A., Mix K.S. (2022). Effects of spatial training on mathematics performance: A meta-analysis. *Development Psychology*. 58(1), pp. 112-137.
[JD] Jeannerod, M., Decety, J. (1995). Mental motor imagery: a window into the representational stages of action. *Current Opinion in Neurobiology*. 5, pp. 727-732.
[Mar] Martin, T. (2009). A theory of physically distributed learning: How external environments and internal states interact in mathematics learning. Child Development Perspectives, 3(3), pp. 140–144.
[Mo] Montessori, M. (2012), *Psicogeometria*, Opera Nazionale Montessori.
[P1] Pasquazi, D. (2019). La geometria intuitiva di Leonardo da Vinci. Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana. Volume: 4, pp. 237-258.
[P2]
http://www.mat.uniroma2.it/~dott/Theses/2020/Pasquazi.pdf
[RL] Rizzolatti G, Luppino G. (2001). The cortical motor system. *Neuron*. 27, 31(6), pp. 889-901.
[RLM] Rizzolatti, G., Luppino, G., & Matelli, M. (1998). *The organization of the cortical motor system: new concepts. Electroencephalography and clinical neurophysiology*, 106(4), pp. 283-296.
[W] M. Wertheimer. *Il pensiero produttivo*. Giunti, 1997.

# *Salvare i fenomeni*

*Lucio Russo*
Università di Tor Vergata

Organizzo il mio intervento rispondendo alle domande di Benedetto, che credo abbiano fornito un'utilissima guida al dibattito.

Per quanto riguarda la prima delle direzioni di cambiamento della scuola verso cui le istituzioni europee spingono fortemente, cioè lo sviluppo di competenze più che di conoscenze, è stato detto giustamente che non vi sono competenze senza conoscenze. Vorrei però sottolineare che il rapporto tra i due aspetti del sapere non è lo stesso in tutti gli insegnamenti. Esistono insegnamenti nei quali le conoscenze, pur essendo necessarie, sono strumentali e immediatamente finalizzate all'acquisizione di competenze specifiche: è quanto accade, ad esempio, in una scuola guida o in un corso di programmazione. In molti insegnamenti delle scuole secondarie italiane, come quelli della storia, della filosofia o della letteratura, le conoscenze hanno invece l'obiettivo non di rendere immediatamente possibile l'acquisizione di competenze specifiche, ma di fornire strumenti intellettuali che permettano di vivere una vita più ricca e di analizzare criticamente la realtà in cui si è immersi.

Insistere sulle competenze opponendole alle conoscenze dimostra quindi da parte delle istituzioni europee la volontà di eliminare gli insegnamenti di questo secondo tipo.

Va detto che alcune discipline scolastiche condividono ambedue gli obiettivi precedenti. L’insegnante di italiano, ad esempio, ha certamente il compito di fare acquisire all’allievo le competenze necessarie per leggere un testo comprendendolo e per scrivere in modo corretto, ma quando insegna letteratura si pone il secondo obiettivo.

Anche nel caso della matematica, come più in generale in tutti gli insegnamenti scientifici, coesistono entrambi gli obiettivi. L’insegnante dovrebbe sviluppare nell’allievo sia le competenze necessarie per risolvere problemi di interesse pratico e per saper leggere un grafico o una statistica, sia fornire strumenti utili per la sua maturazione intellettuale. Il primo obiettivo è oggi raggiunto per lo più privilegiando il *problem solving*, mentre il secondo è stato tradizionalmente perseguito soprattutto attraverso l’insegnamento del metodo dimostrativo, considerato sin dall’antichità molto utile per sviluppare le capacità di ragionamento anche in campi diversi dalla matematica (lo affermava già Quintiliano nella *Institutio oratoria*).

Nel caso della matematica l’opposizione competenze – conoscenze si presenta quindi soprattutto come opposizione tra le tecniche del *problem solving* e l’insegnamento del metodo dimostrativo.

Questa opposizione ha visto soccombere quasi ovunque il metodo dimostrativo, scomparso dalla didattica in quasi tutte le scuole secondarie occidentali (e anche in molti corsi universitari), ma sopravvissuto in Italia (anche se in condizioni precarie e non in tutte le scuole).

Credo che si debba riconoscere che la critica alla didattica tradizionale della matematica nelle scuole secondarie italiane non è priva di ragioni. Spesso la matematica è stata insegnata in assenza di applicazioni interessanti e senza mettere in grado gli studenti di risolvere problemi tratti dalla vita reale. Inoltre le dimostrazioni non erano quasi mai opera dello studente, che si limitava a memorizzare qualcuna di quelle presenti nel manuale. In questa situazione poteva sembrare più che giusto sostituire un esercizio mnemonico di cui non si vedeva lo scopo con l'apprendimento di tecniche utili a risolvere problemi reali.

È stato anche sottolineato, nell'intervento precedente del professor Arbarello, che nessun matematico nel suo lavoro usa il metodo deduttivo. Memorizzare la catena di deduzioni che permette di dimostrare alcuni teoremi quindi non solo non ha utilità pratica, ma non avvicinerebbe neppure lo studente al metodo proprio della ricerca matematica. Nonostante la fondatezza degli argomenti precedenti, credo tuttavia che l'abbandono del metodo dimostrativo nella didattica delle scuole secondarie italiane causerebbe un enorme danno alle future generazioni.

In primo luogo anche l'apprendimento mnemonico di dimostrazioni, a mio parere, non è del tutto inutile. Chi ha memorizzato dimostrazioni di geometria nella scuola secondaria e poi non ha proseguito studi scientifici ha dimenticato, quasi senza eccezioni, tutte le dimostrazioni che ha studiato, ma non ha quasi mai dimenticato (anche se spesso si tratta di un ricordo inconsapevole) cosa sia una dimostrazione e come sia diversa dalle argomentazioni superficiali o addirittura inconcludenti e ciò lo aiuta a giudicare meglio la fondatezza degli argomenti usati in una discussione.

I matematici certamente non usano il metodo deduttivo nella ricerca, che avviene attraverso lo studio di esempi e controesempi, intuizioni che suggeriscono nuove strade da sottoporre a critiche serrate e molti altri procedimenti. Bisogna però anche dire che il metodo deduttivo ha un ruolo essenziale nel loro lavoro, perché ne costituisce in un certo senso l'obiettivo: determina infatti la forma in cui dovrà essere esposto il risultato finale e il solo metodo per verificare se l'obiettivo è stato raggiunto. Il metodo dimostrativo può quindi essere introdotto nella didattica in due modi molto diversi: facendo memorizzare agli studenti dimostrazioni già fatte o sviluppando in loro la capacità di trovare esempi e controesempi di un'affermazione e la capacità di lavorare per trasformare un'intuizione in una dimostrazione. È evidente che nel secondo caso il risultato sarà molto migliore e avvicinerà lo studio al lavoro del matematico.

Il metodo dimostrativo, dove è scomparso, era stato contrapposto allo sviluppo della capacità di risolvere problemi di interesse applicativo. Questa contrapposizione deve essere rifiutata con forza e per questo può essere utile ricostruirne l'origine storica. Per molti secoli il metodo dimostrativo è stato insegnato nell'ambito della geometria euclidea e a lungo attraverso la lettura diretta degli *Elementi* di Euclide. Il nome dell'opera non era casuale; si trattava degli *elementi* (στοιχεῖα) basilari necessari per affrontare qualsiasi problema dell'antica *matematica*, una disciplina vastissima che comprendeva non solo aritmetica e geometria, ma anche meccanica, ottica, geografia matematica, idrostatica, astronomia, teoria musicale e altro. La costruzione di Euclide aveva quindi una varietà estremamente vasta di applicazioni. Nel corso dei secoli le applicazioni sono venute via via meno: in parte perché i metodi geometrici, privilegiati nell'antichità, sono stati sostituiti da metodi algebrici e analitici e in parte perché, più recentemente, alcune delle applicazioni nelle quali i metodi geometrici sono indispensabili sono quasi completamente scomparse dalla didattica. È questo il caso dell'ottica geometrica e della geografia matematica, che sono state espulse dalla cultura condivisa. Il risultato è stato separare quasi del tutto il metodo dimostrativo dalle applicazioni concrete.

Per rivitalizzare il metodo dimostrativo, riavvicinandolo alle applicazioni, credo si possano percorrere due strade, preferibilmente in parallelo: da una parte reintrodurre nella didattica argomenti, come l'ottica geometrica, che sono di grande interesse anche pratico e sono state ingiustamente espulse e, dall'altra, estendere le dimostrazioni anche a settori in cui oggi sono raramente usate nella didattica della scuola secondaria: dall'aritmetica alla probabilità alla meccanica.

La seconda direzione in cui le istituzioni europee spingono fortemente la trasformazione della scuola è la cosiddetta *transizione digitale*. Non è certo una novità, almeno a parole. Roberto Maragliano, coordinatore della commissione dei quaranta saggi nominata nel 1997 dal ministro Luigi Berlinguer, era talmente entusiasta dell'introduzione nella scuola delle "nuove tecnologie" (termine allora usato per ciò che oggi si preferisce dire "transizione digitale") da sostenere che con il loro aiuto si sarebbe dovuto superare lo strumento verbale, divenuto a suo parere obsoleto. Poco dopo Berlusconi lanciò lo slogan delle "tre i", una delle quali stava per informatica: un altro modo per esprimere ancora lo stesso concetto. Bisogna però notare che in questo quarto di secolo in cui si è continuato a parlare della necessità di introdurre i nuovi strumenti informatici nella scuola le competenze informatiche dei giovani non sono aumentate, ma drasticamente diminuite. I ragazzi soffrono di una crescente dipendenza dall'uso dei telefoni cellulari, ma la capacità di scrivere un vero programma da far girare su un computer si è diradata anche tra gli studenti universitari di corsi di laurea scientifici.

Venendo dalle parole ai fatti, dobbiamo chiederci in cosa la "transizione digitale" dovrebbe modificare la didattica. È evidente che la scuola non debba insegnare ai ragazzi l'uso dei cellulari e la navigazione in Internet: queste cose le imparano prestissimo indipendentemente dalla scuola. Quanto a dotare le scuole di computer e LIM, si tratta di strumenti utili che possono essere usati senza alterare granché la didattica tradizionale. La vera novità meritevole di discussione è il possibile uso di simulazioni e credo sia essenziale distinguere due modi concepibili di introdurle nella didattica.

Sono convinto che nell'insegnamento scientifico le simulazioni possano e debbano svolgere un ruolo positivo e importante. Personalmente, diversi anni fa, nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche, ho partecipato a un'esperienza molto interessante al liceo scientifico Augusto Righi di Roma: gli studenti studiavano semplici modelli di sistemi dinamici attraverso simulazioni al computer, riconoscendo così "sperimentalmente" se l'evoluzione tendeva a un punto fisso o a un andamento periodico o era caotica. Ricordo che i ragazzi erano interessati e divertiti e imparavano molto.

La scienza si sviluppa elaborando modelli di fenomeni reali e le simulazioni permettono evidentemente di esplorare il modello usato da chi le ha programmate e non la realtà. Perché il loro uso sia didatticamente efficace credo che siano essenziali due condizioni:

1. Gli studenti debbono conoscere il modello alla base della simulazione o, perlomeno, sapere che un tale modello esiste. Per raggiungere questo obiettivo alcune delle simulazioni più semplici dovrebbero essere programmate da loro. In questo caso anche vedendo simulazioni complesse che non sarebbero in grado di realizzare avranno comunque un'idea del lavoro di programmazione alla loro base.
2. Le simulazioni devono affiancare e non sostituire gli esperimenti.

L'idea, a mio avviso perniciosa, di eliminare l'osservazione del mondo reale sostituendola con l’immersione nel virtuale non è recente, come molti sembrano credere. L’esempio più antico che conosco risale agli anni intorno al 1370, quando Giovanni Dondi costruì il suo famoso astrario, che riproduceva i moti dei pianeti secondo il modello tolemaico, e ne scrisse un’accurata descrizione premettendo le motivazioni del suo lavoro. Lo strumento, a suo parere, sarebbe stato particolarmente utile perché da allora in poi gli astronomi avrebbero potuto evitare di rubare ore al sonno per osservare il cielo, limitandosi a osservare con cura il suo astrario in ore comode.

Gli attuali epigoni di Giovanni Dondi sembrano spesso meno consapevoli di lui. Molti di loro, essendo addirittura ignari dell’esistenza di teorie e modelli, hanno sostenuto che nella didattica l’osservazione di una simulazione dovrebbe sostituire vantaggiosamente sia l’osservazione del fenomeno reale sia lo studio della teoria. L’astronomia, ad esempio, potrebbe essere “studiata” immergendosi in una realtà virtuale in cui si possa viaggiare tra le lune di Giove e la storia romana, analogamente, passeggiando, grazie a un’altra simulazione, nelle strade di Roma nel 44 a.C., immergendosi cioè in realtà virtuali prefabbricate senza alcuna conoscenza dei modelli usati da chi li ha realizzate e dei loro limiti di validità. Mi sembra però che fortunatamente queste sciocchezze stiano passando di moda, anche se forse in Italia ne persistono residui più consistenti.

L’esempio di Giovanni Dondi mi porta alla questione successiva sollevata da Benedetto: si deve, e come, usare la storia della scienza nella didattica scientifica della scuola secondaria? Sono convinto che sarebbe bene che i docenti delle scuole secondarie avessero una conoscenza non superficiale della storia della scienza, non certo per insegnarla sistematicamente in modo filologicamente corretto, ma per arricchire l'insegnamento scientifico. Spesso (anche se non sempre) insegnare una teoria scientifica ignorando la sua genesi storica equivale a insegnarla ignorandone le motivazioni e le applicazioni e quindi menomando in modo essenziale l'efficacia dell'insegnamento. Non si tratta, quindi, nell'insegnamento secondario, di seguire le strade complesse e spesso tortuose che hanno portato alle teorie oggi accettate, ma di illustrarne le motivazioni e la genesi con qualche esempio.

Se le teorie vengono trasmesse ignorando i legami essenziali con la realtà concreta che ne ha fornito motivazioni e applicazioni, si finisce – e vengo così all'ultimo punto sollevato da Benedetto – col trasmettere quelle che ho chiamato *nozioni fossili*. Ad esempio nel medioevo si insegnava che la Terra è sferica sulla base delle autorità che l'affermavano, da Aristotele a Plinio il Vecchio, ma non si sapeva usare più in alcun modo questa nozione, che veniva di fatto ignorata sia dai marinai che tracciavano le rotte sia dai cartografi. La sfericità della Terra era così diventata una nozione fossile. L'insegnamento scientifico nelle scuole secondarie da diversi decenni ha imboccato la stessa strada, trasmettendo in misura crescente brandelli di teorie avulsi dai fenomeni che le hanno motivate e ne determinano l'utilità. Ad esempio si insegna che la Terra gira intorno al Sole, trascurando in genere di citare quali osservazioni possano essere spiegate da una teoria eliocentrica e non da una teoria geocentrica. Analogamente sin dalle scuole elementari ai bambini si dice che la materia è composta di atomi, ma nella grande maggioranza dei casi neppure gli adulti conoscono alcun fenomeno che giustifichi la teoria atomica. Vorrei sottolineare che un tempo la didattica era diversa. Nell'epoca lontana in cui ero uno studente liceale, la teoria atomica, ad esempio, mi fu presentata dopo l'esposizione dei fatti sperimentali che avevano richiesto le leggi delle proporzioni fisse e delle proporzioni multiple, a loro volta difficilmente spiegabili senza ammettere una natura corpuscolare della materia. Il processo degenerativo appena descritto è oggi non solo molto avanzato, ma anche esplicitamente teorizzato. Ha sempre più credito, infatti, l'idea che nelle teorie scientifiche sia racchiusa una Verità superiore che non si basa sull'esperienza, ma piuttosto la contraddice. Non bisognerebbe quindi credere ai propri occhi, ma solo ai nuovi sacerdoti partecipi di conoscenze superiori. Il metodo scientifico è così completamente abbandonato, sostituito da quello che tradizionalmente era riservato all'apprendimento del catechismo.

Un antidoto efficace contro le degenerazioni di cui ho parlato finora può essere fornito dall'inserimento nella didattica di elementi della scienza antica. Un esempio, che ho già fatto ed è stato trattato anche in altri interventi, è lo studio della geometria euclidea: il suo abbandono, dove è avvenuto, ha comportato l'abbandono dell'idea di dimostrazione, con gravi conseguenze sulle capacità argomentative. Un altro esempio, che riguarda soprattutto la fisica, sarebbe il ritorno all'antico precetto che scopo delle teorie è quello di *salvare i fenomeni*. Il suo abbandono, quando è avvenuto, non ha solo rovinato la didattica, ma ha portato anche molti fisici ad accettare teorie, come quella degli universi paralleli, lontane dal vero metodo scientifico.

# *Gorghi, strumenti e... cum*

*Antonio Veredice*
Liceo Peano Monterotondo (Roma)

Quando penso a me stesso e ad altre persone che parlano dell'insegnamento della Matematica a Scuola in contesti "non scolastici" come questa tavola rotonda, mi viene in mente l'immagine di un gorgo. Sì, il gorgo della discesa nel Maelstrom di Edgar Allan Poe o il gorgo creato dal mostro marino Cariddi nello stretto di Messina e descritto da Omero nell'Odissea.

Perché questa immagine? Perché spesso ci capita di parlare di Scuola "dall'esterno" senza trovarci coinvolti in quell'organismo totalizzante che è la classe. All'interno della classe molte delle nostre convinzioni sull'insegnamento vengono messe costantemente in discussione alla luce di una serie di dinamiche che sono fortemente influenzate dai rapporti interpersonali con gli studenti.

Solo per fare un esempio che possa illustrare in maniera lievemente più concreta quello che cerco di dire, voglio citare una lezione di algebra in una prima di liceo scientifico: sono entrato in classe con un libro, qualche lettera e un paio di simboli di operazione (a,b,c,..., x, y, z,…,+,…,$x^{-1}$) e a metà lezione avevo già abbandonato tutto questo apparato simbolico a favore di una serie di altri segni (◊,•,∇, O, □,....). Quei nuovi simboli negoziati al momento con gli studenti sembravano aver creato un canale di comunicazione che non avrei immaginato fra me e loro.

Nell'immagine, la persona che guarda il gorgo dall'alto sono io e siamo tutti noi ogni volta che discutiamo dell'insegnamento dall'esterno.

Con ciò non voglio polemizzare contro le occasioni di discussione e di confronto sull'insegnamento della Matematica che prevedono la partecipazione di non insegnanti. Anzi, ben vengano situazioni come questa tavola rotonda in cui personalità autorevoli si confrontano con insegnanti di Matematica fornendo un loro punto di vista sull'insegnamento di tale disciplina.

Voglio però ribadire che è importante tenere conto della differenza fra ciò che si è detto e condiviso all'esterno della classe e ciò che emerge all'interno di essa e quindi auspico che siano sempre di più le situazioni in cui chi è immerso nel gorgo esca fuori e parli con chi guarda il gorgo dall'alto...per poi immergersi di nuovo!

La seconda immagine che mi è stata evocata dal titolo e dagli stimoli di questa tavola rotonda è quella di un contrabbasso. È uno strumento a cui sono particolarmente legato ma quello che interessa in questa sede sono le sue particolari vicissitudini storiche.

Come anche altri strumenti ha subito quello che alcuni musicologi chiamano processo di *rifunzionalizzazione* (prendendo in prestito questo termine dall'architettura). In particolare si fa riferimento, nel caso del contrabbasso, a ciò che è accaduto nella musica afroamericana. Alcuni abitanti dell'Africa subsahariana, dopo aver subito la deportazione verso gli Stati Uniti, hanno conservato una memoria musicale della loro terra di origine. Tale memoria è emersa negli anni anche attraverso l'uso di strumenti musicali di origine europea i quali sono stati suonati in modo da riprodurre suoni provenienti dalle musiche tradizionali dei paesi di orgine africani. Da ciò nascono ad esempio la *slide guitar*, il modo percussivo di suonare il pianoforte e il contrabbasso pizzicato del Jazz.

Ma cosa c'entra tutto ciò con l'insegnamento della Matematica?

Dato che uno dei temi di riflessione di questa tavola rotonda è l'uso degli *strumenti* nell'insegnamento, mi sono chiesto quando, nella mia esperienza, ho notato che gli studenti trovassero giovamento nell'uso di strumenti. Mi sono risposto, prendendo a prestito il termine dalla musicologia, che l'uso degli strumenti in classe funziona bene quando questi possono essere *rifunzionalizzati* cioè quando si tratta di strumenti duttili che si prestano alle esigenze di ricerca e di scoperta degli studenti.

Non mi piace uno strumento rigido che impone allo studente un solo modo di utilizzo, ne preferisco uno che possa essere manipolato in vari modi, cambiandone anche la destinazione d'uso e valutandone in maniera critica i limiti e le potenzialità.

Faccio riferimento a tutti quegli strumenti che possono essere usati nell'insegnamento della matematica: dalle applicazioni per smartphone, all'intelligenza artificiale, dai software di geometria dinamica alle Macchine Matematiche a cui il collega

Marcello Pergola si era dedicato con tanta passione (si veda a tal proposito il sito https://www.macchinematematiche.org). Non valuto la qualità di questi strumenti in base alla loro modernità ma alla possibilità che danno agli studenti di manipolarli sperimentando con essi.

A tal proposito voglio sottolineare che nel mio percorso di formazione come insegnante ha rivestito un’importanza particolare la frequentazione della SSIS (Scuola di Specializzazione per l’Insegnamento Secondario). Uno degli insegnamenti che ho ricevuto alla SSIS è stato quello di far sperimentare agli studenti le potenzialità ma soprattutto i limiti degli strumenti informatici. Solo per fare un esempio: si può disegnare il grafico di una funzione con un software o una calcolatrice grafica ma bisogna saper interpretare molto bene quel grafico, riflettendo ad esempio sulle scale, altrimenti si rischia di perdere informazioni importanti: la presenza di un punto di discontinuità eliminabile o di un asintoto.

Infine l’ultimo spunto di riflessione su cui mi sono soffermato è la *pluridisciplinarità*. Se ne parla molto in ambito scolastico e nel passaggio fra scuola e università. In particolare mi vengono in mente le attività laboratoriali che vengono proposte nelle sezioni di Liceo Matematico (https://www.liceomatematico.it) o alcune felici iniziative come il Bando del Paradosso: un concorso tra Matematica, Fisica e Filosofia proposto dall’Università Roma Tre agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado (https://sites.google.com/view/pensareperparadossi/Bando).

Tutto ciò è certamente interessante e stimolante-e anche molto apprezzato dagli studenti-ma progettare, nella didattica quotidiana, percorsi pluridisciplinari significativi non è affatto semplice.

Ciò è un po’ singolare perché la scuola sembrerebbe, per la sua stessa natura, il luogo di elezione della pluridisciplinarità: è uno dei pochi posti di lavoro in cui esperti di Scienze, Filosofia, Matematica, Lettere antiche e Moderne, etc... si trovano a lavorare gomito a gomito.

Tuttavia la realtà ci dice che incontrarsi, scambiarsi opinioni e collaborare in maniera autentica nella didattica quotidiana tra colleghi sta diventando sempre più difficile. Pertanto una mia proposta e un auspicio per il futuro è che la Scuola sappia trovare gli spazi e i tempi per la collaborazione tra gli insegnanti. A questo proposito voglio chiudere con la frase che mi ha detto un amico quando mi sono confrontato con lui riguardo il tema di questa tavola rotonda: *Cogito cum Digito*?. Alla mia richiesta: “tu che ne pensi di questo titolo? Qual è secondo te la parola più importante per l’insegnamento della matematica: *Cogito* o *Digito*?” Lui mi ha risposto: “*cum*!”

## ***Bibliografia***

Bartolini Bussi, M. G., Maschietto, M. *Macchine matematiche, dalla storia alla scuola*. Springer, 2006.

Bernardi, C. Le “SSIS”, *Scuole di Specializzazione all’Insegnamento Secondario: riflessioni su un’esperienza decennale*. In: “La matematica nella società e nella cultura”, II, serie I:(2009), pp. 495-513.

Choi, S., Richards, K. *Interdisciplinary Discourse: Communicating Across Disciplines*. Springer, 2017.

Lombardo Radice, L., Mancini Proia, L. *Il metodo matematico nel mondo moderno*. Principato, 1988.
Poe, E. A. *Racconti del terrore*. Mondadori, 1985.
Zenni, S. *I segreti del jazz. Una guida all’ascolto*. Stampa alternativa, 2015.

*L'insegnamento delle discipline scientifiche costituisce da molti anni uno dei punti critici della scuola Italiana. Il premio Nobel per la Fisica Giorgio Parisi, insieme a tre grandi matematici italiani che si sono occupati di scuola e a quattro insegnanti-ricercatori che portano nelle classi i risultati delle loro ricerche, ne ha discusso in una tavola rotonda, che si è tenuta nell'aprile del 2023 presso l'Università di Roma Tre. Nei loro interventi è possibile trovare molti spunti che potrebbero modificare profondamente la nostra visione dell'insegnamento della matematica e delle scienze.*

Edizioni Opera Nazionale Montessori